La gestación
del análisis moderno

Weierstrass

GENIOS
de las
MATEMÁTICAS

La gestación
del análisis moderno

Weierstrass

RBA

© 2016, Juan Matías Sepulcre Martínez por el texto
© 2017, RBA Coleccionables, S.A.U.

Realización: EDITEC
Diseño cubierta: Llorenç Martí
Diseño interior: Luz de la Mora
Infografías: Alberto Fregenal
Fotografías: Fotografías: Album: 22, 71bi, 75, 135ad; Archivo RBA: 21, 23, 27, 29, 35, 64, 65, 71a, 71bd, 94, 95, 135ai, 142, 147; NASA: 121ad; Shutterstock: 31a, 42, 121ai, 121b, 135b; Hans Weingartz: 31b.

Reservados todos los derechos. Ninguna parte de esta publicación puede ser reproducida, almacenada o transmitida por ningún medio sin permiso del editor

ISBN (Obra completa): 978-84-473-8775-5
ISBN: 978-84-473-9066-3
Depósito legal: B 19453-2017

Impreso y encuadernado en Cayfosa (Impresia Ibérica)

Impreso en España - *Printed in Spain*

Sumario

INTRODUCCIÓN 7

CAPÍTULO 1 Los inicios de Karl Weierstrass 17

CAPÍTULO 2 El padre del análisis moderno 47

CAPÍTULO 3 El proceso de aritmetización del análisis 79

CAPÍTULO 4 La repercusión de Weierstrass como maestro 127

LECTURAS RECOMENDADAS 151

ÍNDICE 153

Introducción

En la práctica totalidad de los grados de ciencias e ingenierías de nuestras universidades, las matemáticas son una asignatura básica de primer curso que incluye el estudio de determinados contenidos teóricos y prácticos en torno al análisis matemático (una de las principales ramas de las matemáticas, que engloba el estudio de los números reales y complejos, las sucesiones y series numéricas, las funciones, los límites, la continuidad, y la derivación e integración). En tal contexto, y de manera explícita o implícita, todos los estudiantes universitarios de análisis encuentran el nombre del alemán Karl Weierstrass (1815-1897), también conocido como el «padre del análisis moderno», asociado a algunas de las nociones o resultados fundamentales encuadrados en esta significativa área.

Sin lugar a dudas, el conjunto de la materia tratada en el análisis matemático resulta de importancia capital en la comprensión de los procesos reales de los que se ocupa cualquier ciencia aplicada. Por lo tanto, no debería resultar extraño que un problema vinculado a la física, la química, la geología, la biología o las ciencias del mar, o incluso a la economía, la mercadotecnia, la empresa, la psicología o las ciencias sociales en general, trate de optimizar un modelo que requiera de un análisis pormenorizado encuadrado en esta importante área de las matemáticas. Sirva como ejemplo, aunque solo es una mínima muestra, la maximización del nivel de producción de una empresa donde el coste pro-

medio por unidad sea mínimo; o la operación para hacer máximo un volumen o minimizar un área. En particular, esta rama de las matemáticas proporciona métodos encaminados al análisis e investigación de los distintos procesos de cambio, movimiento y dependencia de una magnitud con respecto a otra.

En este sentido, sabemos que el comportamiento de muchos fenómenos propios de la vida cotidiana puede ser descrito a través de un modelo ajustado a una función matemática que recoja las características objeto de estudio, como en el caso de la evolución del precio de un determinado producto, el consumo de gasolina, la oscilación de la temperatura, los valores de la presión arterial, los impuestos, la demanda de un bien, etc. En estos procesos, conocer las tendencias resulta extremadamente útil para tratar de predecir comportamientos a corto, medio o largo plazo. De hecho, el concepto de función, así como sus propiedades, es uno de los más tratados en los libros de texto de análisis matemático y, por tanto, también uno de los más analizados, por ejemplo, en la investigación educativa. Todo lo concerniente a la teoría de funciones ha adquirido un interés notorio, debido, entre otros factores, a su importancia en campos muy distantes de las matemáticas técnicas. El cálculo de límites, la continuidad y las derivadas de funciones suelen ser piezas de estudio angulares en cualquier programa básico de análisis. Sobre todo el límite (y, por tanto, la convergencia), uno de los conceptos más antiguos del análisis matemático; y también, relacionada con esta noción, una propiedad que resulta poco restrictiva en muchas de las aplicaciones cotidianas, como es la continuidad. A este respecto, al igual que sabemos que el nivel de desgaste de los discos de freno del coche no cambia de manera abrupta de un segundo a otro, pues debe pasar forzosamente por todos los estados intermedios de desgaste, la noción intuitiva de continuidad de una función real de variable real involucra esa misma idea que se ve reflejada en su gráfica.

Es en esta vertiente de las matemáticas donde surge la significativa figura de Weierstrass, quien se encargó de dar el paso definitivo para formalizar matemáticamente todo el proceso envuelto en estas nociones y terminar la tarea iniciada por otros matemáticos, como el francés Augustin Louis Cauchy o el checo

Bernard Bolzano. Se encargó, en particular, de la sistematización del método delta-épsilon para trabajar con las nociones de límite y continuidad, asentándolo todo en un fundamento lógico que depende únicamente del álgebra y la aritmética. De esta manera, en lugar de utilizar expresiones vagas, aunque sugerentes, del lenguaje natural (por ejemplo, «acercarse» a algo o «tan pequeño como uno quiera»), cualquier razonamiento que involucre estos importantes conceptos queda actualmente establecido con absoluta precisión y rigor, es decir, las características que definen actualmente a las matemáticas.

Otro importante aspecto sobre el que Weierstrass hizo especial hincapié fue el relativo a las nociones más generales de convergencia y continuidad uniforme, campo en el que esclareció algunas afirmaciones inexactas que otros autores habían realizado con anterioridad (por ejemplo, acerca de la continuidad del límite de una sucesión de funciones continuas).

De modo particular, los polinomios —tales como las funciones constantes, lineales, cuadráticas, cúbicas...— conforman una subclase de funciones continuas en torno a los cuales formuló Weierstrass, en la última etapa de su vida académica, el fabuloso «teorema de aproximación», que demuestra la posibilidad de representar analíticamente cualquier función continua. En concreto, este resultado garantiza que cualquier función continua pueda ser uniformemente aproximada por un polinomio en un prefijado intervalo cerrado y acotado de la recta real, lo que en muchas aplicaciones resulta suficiente para obtener deducciones con un mínimo margen de error. Este importante teorema fue un fuerte impulsor de una nueva rama de análisis y teoría de la aproximación. Cabe destacar que el resultado de aproximación de Weierstrass emergió como un contrapunto interesante a la difusión, a partir de sus propias investigaciones anteriores, de una función continua en todos los números reales que no era derivable en ningún punto. Este ejemplo patológico contradecía la perspectiva visual o geométrica que se tenía al respecto, ya que no resulta nada fácil imaginarse la gráfica de una función o de un arco continuo de curva que no tenga tangente en ninguno de sus puntos, es decir, con un punto anguloso o pico en cada uno de los puntos de la gráfica. Sin embargo,

Weierstrass demostró que esto era posible, lo cual confirmó que se tenía que elevar el nivel de autocrítica, tanto en las definiciones como en el rigor de las demostraciones, si se quería contribuir a la construcción de un edificio matemático que fuera independiente de toda referencia a la intuición geométrica.

En este sentido, Weierstrass también puso de manifiesto la dependencia de los principales resultados de las funciones continuas con la de una construcción rigurosa de los números reales sobre una base puramente aritmética. De hecho, Karl contribuyó a este proceso de fundamentación concibiendo los números reales como agregados de ciertos elementos (ver capítulo 2), lo que le llevó a poder realizar enormes avances en su línea de trabajo. La trascendencia de este trabajo en torno a la construcción de los números reales, culminado posteriormente por Georg Cantor y Richard Dedekind con otros planteamientos aritméticos más conocidos, fue realmente enorme y, de hecho, podríamos por ejemplo afirmar que, sin esta fundamentación de los números reales, la teoría de funciones de una variable real no hubiera podido despegar. Por ejemplo, a partir de su construcción, Weierstrass demostró sin recurrir a la intuición que una función continua que toma valores en un intervalo cerrado y acotado alcanza un máximo y un mínimo absolutos, lo que podría considerarse como el primer resultado de la llamada teoría de optimización.

Por otra parte, aunque Weierstrass pueda ser considerado como uno de los últimos matemáticos enciclopédicos debido a la ingente cantidad de información que manejaba en su rama, su tema predilecto a lo largo de toda su vida fue el estudio de las funciones elípticas y abelianas, sobre las que logró importantes avances que inicialmente le permitieron dar el salto a la docencia universitaria. Estos estudios supusieron el punto de partida de sus siguientes investigaciones y, en particular, motivaron sus avances sobre la teoría moderna de funciones de variable compleja, de la que Karl es considerado como uno de sus fundadores.

En definitiva, Weierstrass no solo realizó enormes contribuciones e indagaciones en todas las ramas del análisis, sino que también fue una pieza clave en el proceso de aritmetización, llevado a cabo a lo largo del siglo XIX, que conformó una importantísima y revolucionaria etapa en la historia de las matemáticas (ver capítulo 3). Weierstrass realizó pruebas con un enorme cuidado y atención a los detalles, y su rigor pronto se convirtió en legendario. Aunque ciertamente el acercamiento geométrico tiene un valor pedagógico importante en un curso introductorio, Weierstrass ayudó considerablemente a fundamentar científicamente el tratamiento que se ha de emplear en todo el desarrollo propio de su disciplina matemática. En efecto, este proceso de rigorización perseguía apartar cualquier referencia geométrica e intuitiva, predominantes hasta la fecha, y subrayar el papel de la aritmética y la lógica en la construcción de nuevos resultados matemáticos y validación de los mismos. De esta forma, como resultado de tales procesos, se consiguieron fundamentos lógicos y nociones más precisas, reduciendo la consistencia de los resultados que se obtenían a la consistencia de la aritmética y potenciando sus fundamentos.

Weierstrass forma parte del selecto club de grandes matemáticos que obtuvieron el éxito en edad avanzada. En sus primeros décadas de vida, nada presagiaba que Karl se convertiría en un famoso matemático, ya que en su juventud apenas tuvo contacto con profesionales de esta materia y, de hecho, su padre quiso que estudiara finanzas públicas y administración. Tras este fallido periplo se preparó en la Academia Teológica y Filosófica de Münster para ejercer como profesor de matemáticas de escuelas de educación secundaria. Fue allí donde conoció al profesor Cristoph Gudermann, quien le inspiraría en sus primeros escritos matemáticos, centrando su vida en las matemáticas a partir de ese momento. En concreto, tras escribir un artículo que le trajo reputación, Weierstrass llegó a Berlín a la edad de 41 años, y finalmente fue nombrado profesor titular de la Universidad de Berlín cuando tenía 48 años.

No cabe duda pues que, en muchos aspectos, el matemático alemán se adelantó a su época. No solo en la vertiente puramente matemática, cuyo legado es tremendamente importante, sino también en los aspectos educativos y de relaciones profesionales, ya que, en efecto, su amplia visión de miras quedó demostrada en numerosas ocasiones a lo largo de su dilatada trayectoria aca-

démica. En particular, de la mano de Ernst Kummer y Leopold Kronecker, Weierstrass hizo que la Universidad de Berlín alcanzara una gran fama internacional. De hecho, tanto sus instructivas y brillantes clases regulares como su participación en la creación y el buen desarrollo del primer seminario de matemáticas puras en una universidad alemana, amén de otras actividades académicas, hicieron que la universidad berlinesa se convirtiera en un modelo para otras universidades e instituciones académicas europeas.

Karl Weierstrass era partidario de que el profesor dejara que la ciencia se desarrollase ante los ojos de sus alumnos y, en este sentido, eligió promulgar su trabajo a través de sus cursos en la Universidad de Berlín. No cabe duda de que sus teorías influyeron sobre numerosos alumnos que pasaron por la escuela de Berlín y, de hecho, muchos de ellos llegaron a ocupar puestos importantes en diversas universidades e instituciones académicas. La lista de brillantes alumnos que asistieron a sus lecciones es realmente extensa y en ella podemos encontrar algunos nombres de matemáticos que posteriormente alcanzaron una gran notoriedad (ver capítulo 4), entre los que encontramos a Sofia Kovalevskaya, quien no fue inicialmente aceptada como alumna regular de la Universidad de Berlín en una época en la que la educación de las mujeres no estaba en absoluto normalizada. No obstante, a pesar de sus numerosas obligaciones, Weierstrass demostró de nuevo su extensa visión de miras al tomar la decisión de impartirle clases particulares y sugerirle temas de trabajo fundamentales, como también hizo con otros alumnos que tutelaba en sus clases ordinarias. Parecer ser que esta vertiente generosa hacia la investigación no era ni mucho menos habitual en la época, pero es indudable que a Karl le interesaba especialmente que se pudiese hacer progresar verdaderamente el conocimiento científico independientemente de la autoría de la publicación o de que se le citara.

De hecho, a lo largo de todo el periodo en Berlín, Weierstrass no tuvo ningún afán de publicación, la mayoría de sus avances y su manera de comprender las matemáticas fue comunicada de forma oral en sus clases, lo que hizo que muchos de los conceptos, métodos y resultados fueran conocidos por sus oyentes y alumnos antes que por la comunidad matemática. Así, muchas de las notas de los cursos de Weierstrass fueron publicadas por sus alumnos en distintas fases a lo largo de su vida, y fue a partir de 1894, poco antes de su fallecimiento, cuando empezaron a aparecer los volúmenes, editados con la ayuda de los propios estudiantes y colegas, de sus obras completas.

1815 Karl Theodor Wilhelm Weierstrass nace el 31 de octubre de 1815 en Ennigerloh (noroeste de Alemania).

1829 Ingresa en el Instituto Católico de Paderborn, cerca de Münster, donde destaca en los estudios de secundaria.

1834 Ingresa en la Universidad de Bonn para estudiar finanzas públicas, economía y administración.

1839 El 22 de mayo se inscribe en la Academia teológica y filosófica de Münster para obtener el grado de maestro de secundaria.

1840 Presenta un ensayo sobre funciones elípticas como parte de las tareas asignadas para obtener el grado de maestro.

1842 Empieza su carrera docente en un instituto de secundaria de Deutsch-Krone.

1854 Se publica en la revista *Crelle* su artículo acerca de la teoría de las funciones abelianas. El 31 de marzo, la Universidad de Königsberg le confiere el grado de doctor honorario.

1856 El 14 de junio acepta la oferta de una cátedra del Instituto de la Industria de Berlín. En octubre empieza a ejercer como profesor asociado de la Universidad de Berlín. El 19 de noviembre de 1856 es elegido miembro de la Academia de Berlín.

1860 Junto con Ernst Kummer promueve el primer seminario de matemática pura en Berlín, que adquiriría un notable prestigio y atraería el interés internacional.

1864 El 2 de julio comienza a ejercer como profesor titular de la Universidad de Berlín.

1873 Es nombrado rector de la Universidad de Berlín.

1875 Se convierte en caballero de la orden Pour le Mérite en la categoría de Artes y Ciencias.

1892 Recibe la Medalla Helmholtz, la cual se otorga por primera vez en Berlín en dicho año.

1894 Aparece el primer volumen de sus obras completas.

1895 El 30 de noviembre es galardonado con la Medalla Copley, el más alto honor de la Royal Society de Londres, como reconocimiento a sus investigaciones en matemática pura.

1896 El 8 de abril de 1896 es elegido miembro honorario extranjero, en el apartado de Matemáticas y Astronomía, de la Academia Estadounidense de las Artes y las Ciencias.

1897 Muere en Berlín, el 19 de febrero, víctima de una neumonía.

CAPÍTULO 1

Los inicios de Karl Weierstrass

Nada presagiaba que Karl Weierstrass se convertiría en un famoso matemático. Su padre quiso que estudiara finanzas públicas y administración en la Universidad de Bonn. Sin embargo, durante su etapa de formación estudió matemáticas de forma autodidacta, lo que le permitió profundizar en el estudio de la variable compleja y de las funciones elípticas. Significativamente, la falta de contacto con la mayor parte de los grandes matemáticos de la época proporcionó a sus trabajos un carácter singular.

En 1815, Europa vivía un momento de cambios políticos. El emperador de los franceses, Napoleón Bonaparte (1769-1821), había caído derrotado en la batalla de Waterloo, lo que puso fin a sus aspiraciones de extender su dominio a toda Europa. Unos días antes, se había aprobado el Acta final del Congreso de Viena, por la que se acordaba la nueva reordenación territorial de Europa. El acuerdo, impulsado por las potencias que se habían enfrentado a la Francia napoleónica, sancionaba el establecimiento de una Confederación Germánica que agrupaba, bajo la égida de Prusia y Austria, a distintos Estados de habla alemana.

El 31 de octubre de 1815, cuando Europa comenzaba a adaptarse a su nueva realidad política, venía al mundo Karl Theodor Wilhelm Weierstrass, en Ostenfelde, localidad del poblado de Ennigerloh, ubicado en el noroeste de Alemania. Fue el primer hijo del matrimonio católico formado por Wilhelm Weierstrass y Theodora Vonderforst, que procreó un varón más, de nombre Peter (1820-1904), y dos hijas, Klara (1823-1896) y Elisa (1826-1898). El padre de Karl era funcionario del Gobierno, lo que permitía a la familia llevar una vida razonablemente desahogada. Hombre bien educado, con conocimientos de física y química y perfecto dominio del francés, deseaba que sus hijos alcanzaran una posición superior mediante algún alto cargo en la administración pública.

El año 1815 fue también el del nacimiento del estadista y político alemán Otto von Bismarck, una de las figuras clave de las relaciones internacionales durante la segunda mitad del siglo XIX, y de la matemática y escritora británica Ada Lovelace, reconocida como la primera en describir un lenguaje de programación de carácter general.

INFANCIA Y ADOLESCENCIA

La madre de Karl murió cuando este tenía 12 años y poco se sabe acerca de ella. Un año después de su muerte, Wilhelm Weierstrass volvió a casarse con un ama de casa alemana, Maria Theresia Hölscher, quien, al parecer, tuvo escasa influencia sobre el posterior desarrollo intelectual de su hijastro.

Debido a que el padre trabajaba como inspector de impuestos, la familia tenía que mudarse de un lugar a otro bastante a menudo. Por ello, Weierstrass empezó la escuela primaria en Münster, pero, en 1829, ingresó en el Instituto Católico de Paderborn. Allí se reveló como un excelente estudiante y obtuvo varias menciones en distintas materias, entre las cuales se encontraban las matemáticas. Al parecer, adquirió bastantes conocimientos matemáticos con una gran facilidad. De hecho, entre los contenidos matemáticos que formaron parte del aprendizaje temprano y sistemático de Karl se encontraban los esenciales concernientes a los de geometría elemental, trigonometría y teoría elemental de números, que intervienen directa o indirectamente en la mayoría de las ramas matemáticas y que le proporcionarían, junto con otros conceptos y resultados estudiados, una base sólida en su posterior adquisición de conocimientos matemáticos.

Sin embargo, el joven Karl Weierstrass no solo destacó como alumno de matemáticas, pues ganó muchos de los premios para los mejores estudiantes; por ejemplo, en las asignaturas concernientes a los idiomas alemán, latín y griego, y también en poesía. No obstante la caligrafía fue su punto débil, y no presentaba interés por enseñanzas artísticas como pintura, el teatro o la música.

NAPOLEÓN Y SUS ENEMIGOS

Napoleón Bonaparte (1769-1821), corso de origen, destacó como militar en las guerras que sucedieron al estallido de la Revolución francesa, cuando los ejércitos británicos, españoles y austríacos pretendieron deponer la República recién instaurada en Francia. El prestigio ganado en dichas lides le permitió convertirse en el general más joven de la historia militar de Europa, pues accedió a tal rango con tan solo veinticinco años. Nombrado primer cónsul de la República el 11 de noviembre de 1799, fue cónsul vitalicio desde el 2 de agosto de 1802, cargo que solo abandonaría para hacerse coronar como «Emperador de los Franceses» (2 de diciembre de 1804). Más tarde fue proclamado rey de Italia, el 18 de marzo de 1805.

Bonaparte cruzando los Alpes, pintura realizada por Jean-Louis David en 1801.

Sus campañas exteriores crearon reinos satélites como la alemana Confederación del Rin, en donde fueron impuestos los ordenamientos legales heredados de la revolución. Incluso llegó a invadir Rusia (1812), de donde hubo de replegarse, debido a las severas condiciones del invierno. Derrotado finalmente por británicos y prusianos en la batalla de Waterloo (Bélgica), en 1815, sufrió destierro en la isla de Santa Elena, donde falleció.

La Santa Alianza

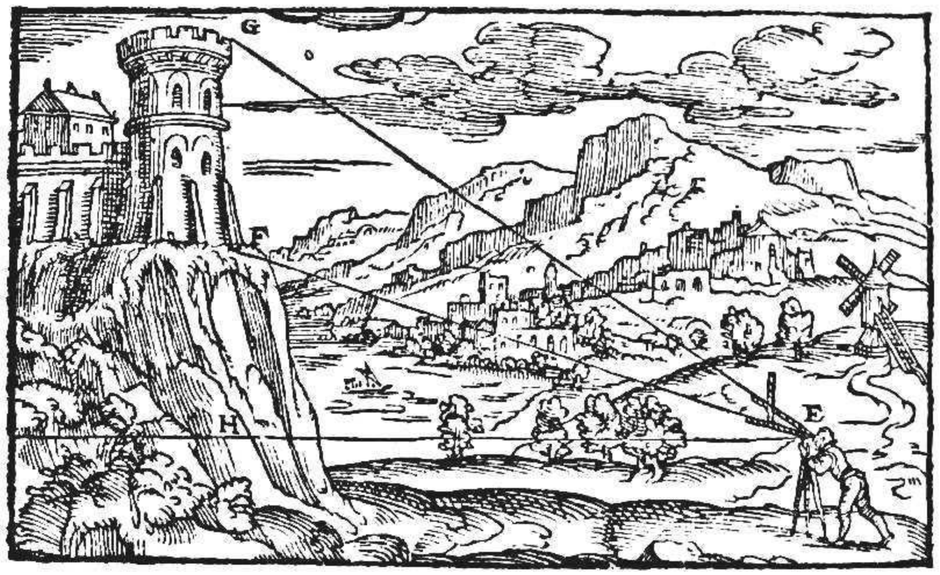
Vencido Napoleón, los reinos europeos se reunieron en el Congreso de Viena (1814-1815). El artífice de ese foro internacional fue Klemens von Metternich (1773-1859), canciller del Imperio austriaco, cuyo proyecto consistía en restablecer tanto las fronteras anteriores a las guerras napoleónicas como los regímenes autoritarios previos a la revolución. Para Alemania, el Congreso de Viena supuso la restitución de las antiguas dinastías que reinaban sobre el archipiélago de pequeños estados independientes que orlaban a Prusia y Austria, y cuyos ordenamientos legales eran herederos del sistema estamental y autoritario de la Edad Media. Sin embargo, las décadas de 1820, 1830 y 1840 asistirían a movimientos revolucionarios de cariz nacionalista y liberal que acabarían trastocando el orden europeo soñado por Metternich.

De hecho, cuando sus hermanas intentaban que asistiera a clases de música, con el objetivo de que resultara más sociable, Weierstrass solía abandonarlas tras una o dos lecciones mal aprendidas. En general, los conciertos y las óperas le aburrían cuando era arrastrado a asistir a alguno de estos espectáculos.

Por otra parte, el Instituto de Paderborn disponía de una buena biblioteca científica y el futuro catedrático la frecuentaba a

GEOMETRÍA Y TRIGONOMETRÍA

La geometría, inicialmente vinculada a un bloque de conocimientos prácticos relacionados con las longitudes, áreas y volúmenes, puede catalogarse como una de las ramas más antiguas de las matemáticas. El desarrollo de la astronomía y la cartografía, usadas para determinar las posiciones de estrellas y planetas en la esfera celeste, sirvió como importante fuente de resolución de problemas geométricos durante mucho tiempo. Relacionada con la geometría, la trigonometría es la rama matemática propia de los ámbitos que requieren medidas de precisión, particularmente en la medición de ángulos o longitudes de lados en distintas figuras geométricas.



Grabado francés del siglo XVII que muestra la aplicación de la trigonometría al tiro artillero.

TEORÍA ELEMENTAL DE NÚMEROS

La teoría elemental de números estudia las propiedades relacionadas con los números enteros, como la divisibilidad o su factorización como producto de números primos. Esta rama aglutina una gran cantidad de cuestiones que podrían ser rápidamente comprendidas por un lector no experto, pero que en muchos casos requieren consideraciones muy profundas. Algunos ejemplos de ello son:

Pierre de Fermat.

- La conjetura de Goldbach, que expone que todos los números pares mayores que 2 son la suma de dos números primos.
- La conjetura sobre la infinitud de los números primos gemelos, que sostiene que hay infinitos números primos que resultan impares consecutivos.
- El último teorema de Fermat, que constituye uno de los teoremas más conocidos en la historia de las matemáticas y afirma que, dado cualquier número entero n mayor que 2, no existen números enteros positivos x, y, z tales que $x^n + y^n = z^n$.

menudo, en busca de contenidos matemáticos. Allí comenzó a leer regularmente la publicación titulada *Journal für die Reine und Angewandte Mathemati* (*Revista de matemáticas puras y aplicadas*), más conocida como *Crelle*, una publicación fundada en 1826 por el ingeniero berlinés August Leopold Crelle (1780-1855) que resultó clave en el posterior arranque de la carrera académica de Weierstrass.

Varios volúmenes de *Crelle* se publicaron en el período en que Weierstrass asistió a las clases en Paderborn, entre 1829 y 1834, de manera que este pudo leer artículos sobre temas generales. Entre los artículos y cartas publicados esos años, cabe destacar los escritos por grandes matemáticos como Niels Henrik Abel (1802-1829),

Adrien-Marie Legendre (1752-1833), Carl Gustav Jakob Jacobi (1804-1851) y Christoph Gudermann (1798-1852), quien sería futuro profesor de Weierstrass. Varios de estos artículos versaban sobre la teoría de las funciones elípticas, un tema que determinaría, a la postre, el área principal de interés de Weierstrass.

Así pues, Karl Weierstrass logró en el Instituto de Paderborn un nivel de aptitud matemática ciertamente más allá de lo que se habría esperado. A pesar de ello, ningún otro miembro de la familia sintió inclinación hacia el estudio de las matemáticas. Aunque el propio Karl instruía a su hermano Peter en el estudio de esta materia, este no consideraba útiles esas clases. Además, en esta misma etapa, con tal de ayudar a la economía familiar, Karl comenzó a trabajar a los quince años como auxiliar de contabilidad en un próspero comercio de jamón y manteca.

LOS AÑOS EN LA UNIVERSIDAD DE BONN

Con diecinueve años de edad se graduó en Paderborn, como el mejor de su promoción y tras acortar un año su período escolar. El padre, muy satisfecho por el alto rendimiento de su hijo mayor, afianzó el deseo de verlo en algún alto cargo de la administración pública, donde se encontraban los mejores trabajos de contabilidad. Por tanto, lo envió a la Universidad de Bonn para que estudiara administración y finanzas públicas.

En Bonn, el curso incluía el estudio de leyes, finanzas y economía, materias por las que, en un principio, Weierstrass no sentía un interés especial, sobre todo tras su aproximación a las matemáticas superiores. A fin de cuentas se sintió obligado a ingresar en la Universidad de Bonn para complacer a su padre dejando de lado la disciplina por la que percibía especial predilección: las matemáticas.

Esta decisión, nada satisfactoria para él, le causó un evidente estrés mental y físico. De hecho, al poco tiempo de llegar a Bonn se desentendió de sus estudios y terminó por no asistir a las clases. En vez de eso, se unió a la sociedad estudiantil Korps Saxonia Bonn y comenzó a practicar la esgrima —deporte en el que destacó como un contrincante admirable— y a frecuentar reuniones de estudiantes en las que corría abundante cerveza. Así, tras cuatro años en Bonn en los que ni siquiera se presentó a los exámenes finales, acabó por volver a casa admitiendo que no quería estudiar administración y finanzas públicas, para decepción de su padre.

> «El conflicto entre el deber y su inclinación le condujeron a la tensión física y mental. Intentó, en vano, superar sus problemas llevando una vida descuidada de estudiante.»
>
> — KURT R. BIERMANN.

Sin embargo, en lo que se refiere a las matemáticas, Karl Weierstrass no desperdició en absoluto los años transcurridos en Bonn. Asistió a un curso de geometría del matemático y físico alemán Julius Plücker (1801-1868) y, por propia iniciativa, estudió algunos libros que le resultaron muy instructivos, como el *Traité de mécanique céleste* (*Tratado de la mecánica celeste*) del matemático y astrónomo francés Pierre-Simon Laplace (1749-1827), que constaba de cinco volúmenes donde el autor perfeccionaba el modelo astronómico elaborado por Isaac Newton (1642-1727) de manera completamente analítica.

En esta época, Weierstrass estudió algunos escritos acerca de las funciones elípticas, con las que ya había tenido contacto durante su etapa de Paderborn. En concreto, comenzó a analizar el tratado titulado *Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum* (*Fundamentos de la nueva teoría de funciones elípticas*), obra del matemático alemán Carl Gustav Jakob Jacobi (1804-1851) publicada en 1829. Dicho trabajo le resultó bastante complicado de entender, ya que, de entrada, requería el estudio del *Traité des fonctions elliptiques* (*Tratado de las funciones elípticas*) del matemático francés Adrien-Marie Legendre (1752-1833), publicado en 1825. Además, de forma por completo casual, consiguió y estudió unos apuntes sobre funciones elípticas que correspondían a las clases del ya citado profesor Christoph Gudermann.

LAS FUNCIONES ELÍPTICAS

En las postrimerías del otoño de 1838, Weierstrass volvió a casa de su padre con un aspecto muy desmejorado y en mal estado psíquico. Seis meses después de su regreso, el presidente del tribunal de justicia de Paderborn, buen amigo de la familia, sugirió la posibilidad de que el joven no regresara más a la Universidad de Bonn y se preparara en la cercana localidad de Münster para conseguir la cualificación de maestro de secundaria, una formación menos exigente que, se esperaba, no atacaría su delicada salud.

«Se le veía terriblemente mal cuando volvió a casa ¡Fue tan doloroso ver a mi hermano mayor en tal estado!»

— PETER WEIERSTRASS, EL HERMANO DE KARL, CARTA A GÖSTA MITTAG-LEFFLER.

Dada la preocupación de la familia, esta sugerencia fue debidamente sopesada y por fin aceptada, de modo que el 22 de mayo de 1839 Weierstrass se inscribió en la Academia Teológica y Filosófica de Münster. Allí fue donde se encontró con Christoph Gudermann, discípulo del gran matemático y físico alemán Carl Friedrich Gauss (1777-1855), y muy posiblemente la principal inspiración matemática del muchacho.

El profesor Gudermann, fascinado por las aportaciones de las funciones elípticas, organizó en 1839 un curso para divulgarlas entre el alumnado interesado, lo que le convirtió en el segundo docente matemático en Alemania, tras Jacobi en la Universidad de Königsberg, que realizaba este tipo de sesiones sobre ellas. Basó su curso en la obra del propio Jacobi y, tras la clase inaugural, a la que asistieron trece personas, las sesiones más técnicas únicamente contaron con un asistente: Karl Weierstrass, cuyo interés delataba una creciente dedicación a estas funciones.

El 29 de febrero de 1840, Weierstrass solicitó permiso al presidente de la comisión evaluadora para figurar como candidato a superar las pruebas objetivas. Dicha solicitud, admitida el siguiente 2 de mayo, emplazaba al alumno a una prueba escrita y un examen oral.

PIERRE-SIMON LAPLACE

Pierre-Simon Laplace (1749-1827) fue un matemático, astrónomo y físico francés que realizó importantes aportaciones a la ciencia en campos muy diversos. Sus trabajos matemáticos resultaron muy influyentes para la astronomía, que, a su vez, era una fuente muy importante para la investigación matemática en el siglo XVIII. De hecho, el primer gran trabajo científico de Laplace fue la aplicación de las matemáticas a la mecánica celeste, para estudiar el movimiento de los cuerpos celestes en virtud de las fuerzas gravitatorias a las que se encuentran sometidos. Entre 1799 y 1825, reunió sus escritos en una obra de cinco volúmenes, el *Tratado de la mecánica celeste*, en la que se proponía unificar tanto sus propias investigaciones como gran parte del trabajo previo en este ámbito. De esta forma, Laplace sistematizó la obra de generaciones anteriores de astrónomos y matemáticos, y proporcionó una solución perfeccionada a los principales problemas vinculados a la mecánica celeste. Así pudo confirmar con pruebas matemáticas, por ejemplo, algunas explicaciones acerca de las desviaciones de los planetas de sus órbitas que anteriormente habían sido apuntadas por otros astrónomos.

Aportaciones en múltiples campos

Entre otras contribuciones, Laplace también realizó muchas aportaciones a la estadística y a la teoría de probabilidades. Además, efectuó una importante tarea divulgativa, pues sus principales trabajos vinieron acompañados de extensas exposiciones, escritas en términos no técnicos, para quienes eran incapaces de seguir sus fantásticas abstracciones. Cabe mencionar en este sentido obras como *Ensayo filosófico sobre las probabilidades* (1814) y *Exposición del sistema del mundo* (1796), uno de los tratados más atractivos sobre astronomía.

En lo que se refiere a la prueba escrita, Weierstrass disponía de un plazo de seis meses para elaborar tres temas correspondientes a los campos de filosofía, matemáticas y pedagogía. La parte matemática consistía en la resolución de tres problemas elegidos por Gudermann, cuyo nombre figuraba como uno de los tres examinadores que conformaban el jurado. Se trataba de un problema de geometría elemental, otro de mecánica superior y un tercero sobre la representación de las funciones elípticas. Este último venía acompañado de una nota que indicaba explícitamente que se trataba de un problema bastante difícil para un joven analista, pero que se planteaba al candidato por expreso requerimiento y consentimiento de la comisión evaluadora. Además, se señalaba de forma explícita que en la parte final de cada una de las respuestas debía aparecer una declaración del alumno, haciendo constar expresamente que el material entregado había sido preparado por el candidato sin ninguna ayuda.

Gudermann había impulsado la idea de que las series de potencias habrían de desempeñar un papel esencial en el estudio de las propiedades de las funciones elípticas. Las series de potencias son sumas de la forma:

$$a_0 + a_1 (x-c) + a_2 (x-c)^2 + \ldots$$

En la que a_0, a_1, a_2, ... son los coeficientes y c representa una constante.

En este sentido, la prueba planteada en el examen escrito de Weierstrass consistía *grosso modo* en resolver el problema de hallar los desarrollos de las funciones elípticas en forma de series de potencias, y de obtener una ecuación diferencial que las identificara. Las ecuaciones diferenciales son ecuaciones que relacionan una función con sus derivadas. Se trata, por tanto, de ecuaciones que permiten deducir la expresión de una función a partir de su ritmo de variación, y que son útiles para formalizar las leyes tanto de varias disciplinas científicas como de la economía.

Inspirado en la idea de su maestro y siguiendo el camino marcado por Niels Henrik Abel, Weierstrass presentó en otoño de 1840 un trabajo sobre la nueva teoría de funciones elípticas. Su escrito

contenía notables avances con respecto a la teoría previa, y apuntaba los contenidos básicos que constituyeron sus posteriores investigaciones sobre el tema.

Tras la recepción y el análisis de las respuestas enviadas por Weierstrass, el tribunal valoró muy positivamente el trabajo y reconoció de forma explícita el talento especial del candidato, que había abierto un nuevo camino en la teoría de funciones elípticas. El propio Gudermann advirtió la importancia del trabajo presentado por Weierstrass, señalando que era «del mismo nivel que los descubrimientos que son coronados por la gloria» e indicando que

LA HISTORIA DE LAS FUNCIONES ELÍPTICAS

Las funciones elípticas emergieron de las llamadas integrales elípticas, aparecidas de manera natural al tratar de resolver una gran cantidad de problemas geométricos y físicos. El noruego Niels Henrik Abel (1802-1829) y Carl Gustav Jakob Jacobi fueron los creadores de la llamada «teoría de funciones elípticas». Los primeros resultados de Abel se publicaron en 1827. En esencia, su procedimiento para manejar las funciones elípticas fue usado por Jacobi en 1829 en sus *Fundamentos de la nueva teoría de las funciones elípticas*, obra que se convirtió durante algún tiempo en el escrito de referencia para la investigación sobre esta clase particular de funciones. También abordaron su estudio otros grandes matemáticos, como Carl Friedrich Gauss, que posiblemente pudo anticiparse a Abel y Jacobi en algunos de sus avances; y A. M. Legendre, quien, entre 1825 y 1828, publicó un extenso tratado en tres volúmenes titulado *Estudio de las funciones elípticas y las integrales eulerianas*.

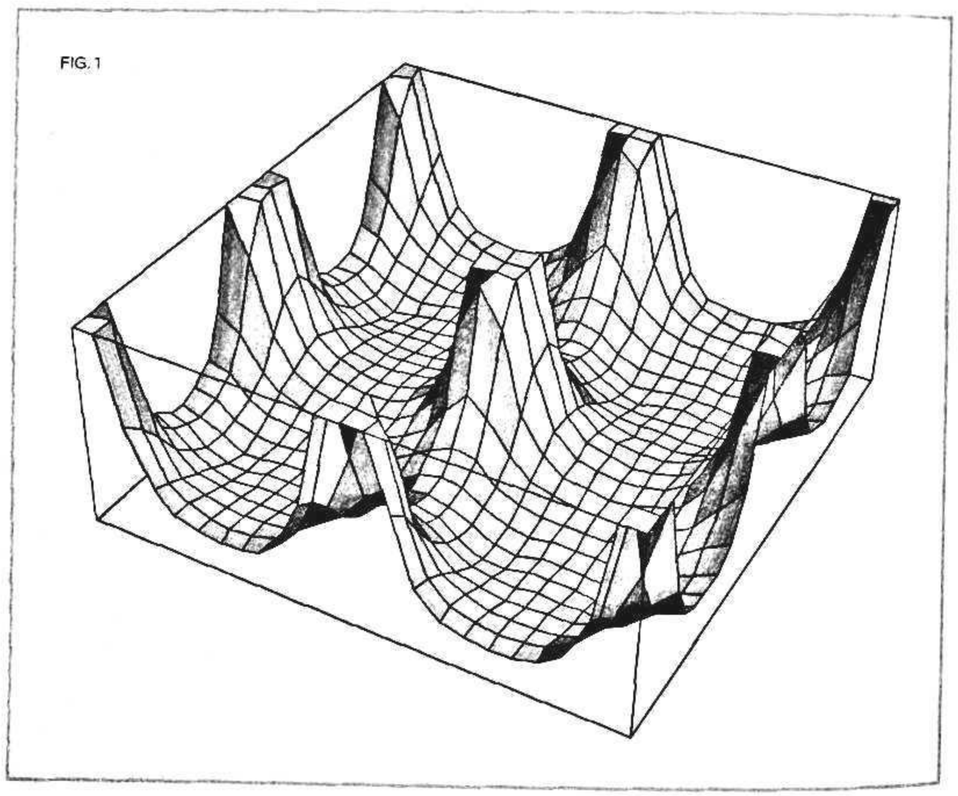
Niels Henrik Abel.

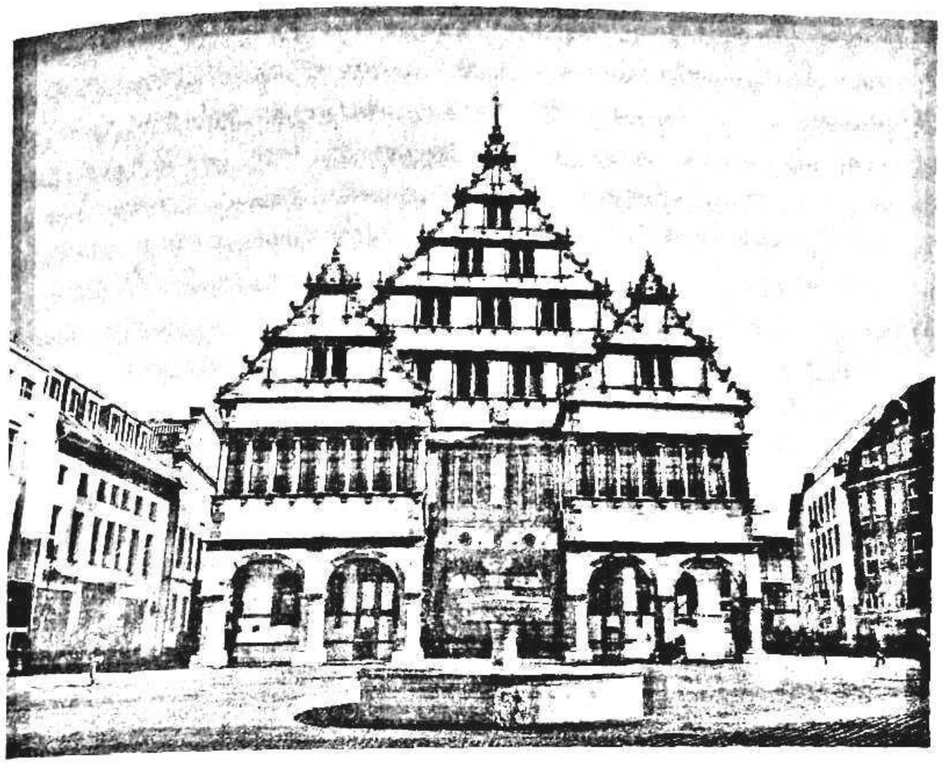
la actividad como profesor de secundaria no era la más conveniente para sus intereses. Sin embargo, esta nota específica no fue publicada hasta cincuenta y cuatro años más tarde, de manera que las palabras de Gudermann —susceptibles de haber cambiado el curso de la vida de Weierstrass— no fueron atendidas o, al menos, no causaron una gran impresión.

Finalmente, tras la prueba escrita, durante los días 23 y 24 de abril de 1841, se procedió con éxito a la segunda parte del examen, que consistió en exámenes orales e impartición de clases, a modo de ensayos, a los alumnos de un primer curso del instituto. Una vez superados todos estos requisitos, Karl Weierstrass recibió el diploma acreditativo que le permitiría convertirse en profesor de secundaria.

Weierstrass supo aprovechar a la perfección su período escolar de aprendizaje, durante el cual contrajo amistad con los buenos maestros de matemáticas con quienes tuvo contacto. Ellos le im-

Función elíptica, periódica en dos direcciones independientes del plano.





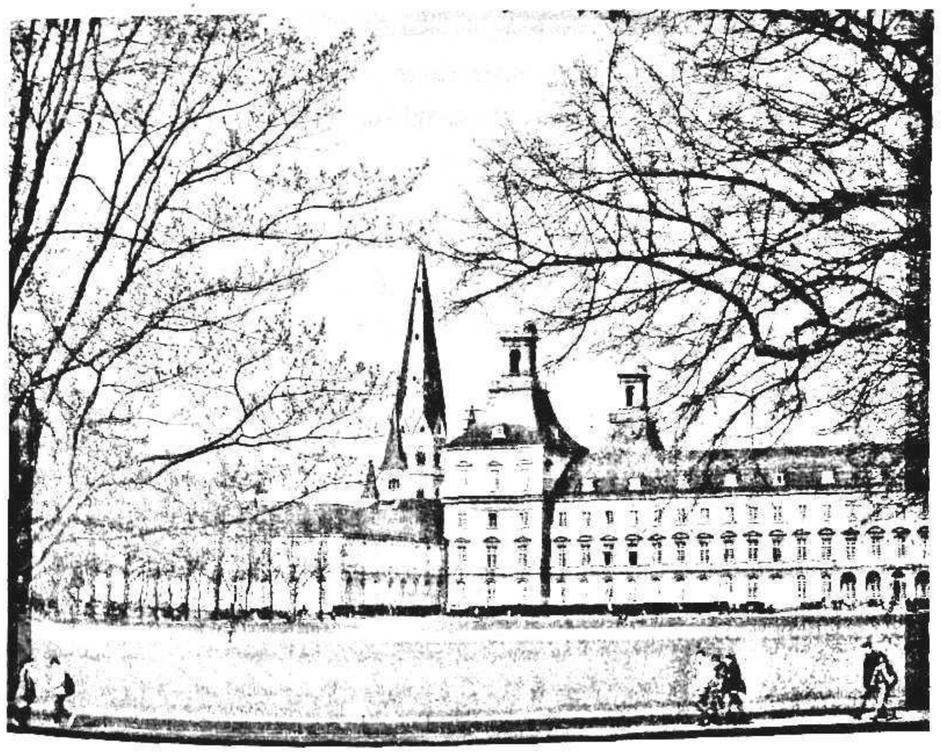


FOTO SUPERIOR:
Ayuntamiento renacentista de la ciudad de Paderborn, donde Weierstrass acudió al instituto y empezó a estudiar de forma autodidacta matemáticas de alto nivel.

FOTO INFERIOR:
Edificio principal de la Universidad de Bonn, de la que fue alumno Karl Weierstrass.

pulsarían a seguir trabajando con las matemáticas. Tanto los profesores de Paderborn, como posteriormente Karl Dietrich von Munchow (1778-1836) y, sobre todo, Gudermann, resultaron decisivos en el posterior devenir de la trayectoria vital de Weierstrass. No es de extrañar, por tanto, que este último mantuviera, por el resto de su vida, una deuda de gratitud hacia Gudermann, que hizo pública en reiteradas ocasiones.

LOS AÑOS EN MÜNSTER Y DEUTSCH-KRONE

Tras aprobar los exámenes orales, en la primavera de 1841 inició Weierstrass su instrucción como profesor de secundaria en la propia localidad de Münster. Allí realizó prácticas durante un único curso y en otoño de 1842 fue trasladado al instituto católico de secundaria de la ciudad prusiana de Deutsch-Krone (la actual Wałcz, en Polonia), donde comenzó a trabajar como profesor adjunto. Al poco tiempo de su llegada, con veintiséis años de edad, se convirtió en el titular del recién creado puesto de profesor de Matemáticas y Física. Permaneció hasta 1848 en dicho centro, donde también impartió lecciones de Lengua Alemana, Botánica, Caligrafía, Geografía e Historia y, en la última etapa, incluso de Educación Física. Al parecer, muy pronto trabó una buena relación con compañeros y alumnos, pues se mostró como una persona muy accesible, comprensiva y amable.

Weierstrass compaginó las tareas y actividades rutinarias del instituto con la lectura pormenorizada de artículos matemáticos, entre los que se encontraban los de su admirado Abel. Además, elaboró varios trabajos matemáticos de gran altura, emprendidos sin la voluntad de publicarlos. Durante su primer año de actividad docente escribió tres trabajos encuadrados en la teoría de las funciones de variable compleja, que además le ayudaron a preparar el terreno para sus futuros e importantes descubrimientos. Precisamente, la teoría de las funciones de variable compleja —o el análisis complejo— es una de las ramas clásicas de las matemáticas que tiene sus raíces más allá del siglo XIX. Esta rama investiga

propiedades de funciones definidas sobre los números complejos, sobre las que Weierstrass centró estos trabajos.

LAS FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA

La teoría de las funciones de variable compleja —también llamado análisis complejo— es una de las ramas clásicas de las matemáticas, cuyas raíces son anteriores al siglo XIX. Esta rama de las matemáticas investiga propiedades de funciones definidas sobre los números complejos, que centraron la atención de Weierstrass en sus trabajos.

Los números complejos aparecen debido a que el cuadrado de cualquier número real es no negativo, es decir, el cuadrado de un número real es siempre mayor o igual que cero, independientemente del signo del número. Por tanto, ecuaciones como,

$$x^2 = -1 \rightarrow x = \sqrt{-1}$$

no tienen solución en los números reales.

Por ello, se creyó conveniente introducir formalmente un nuevo sistema numérico con el que manejar números como $\sqrt{-1}$ y dar sentido a expresiones como $2\sqrt{-1}$, $1+\sqrt{-1}$ o $3-2\sqrt{-1}$. Para representar $\sqrt{-1}$ se utilizó el símbolo i (esta relación se puede expresar como $\sqrt{-1} = i$, introducido en 1777 por el matemático suizo Leonhard Euler (1707-1783), quien lo llamó «número imaginario» por ser de naturaleza distinta a la del número real. La colección de todos los números complejos se denota por $\mathbb{C}$, y cada uno de ellos tiene la forma $a+bi$, donde a y b son coeficientes reales y se denominan a la parte real y b la parte imaginaria.

Por tanto, los números complejos vienen dados claramente como una cierta extensión del sistema de los números reales. De este modo, constituyen un sistema más amplio en el que la ecuación $x^2 = -1$ y, en general, toda ecuación polinomial de grado mayor o igual que uno con coeficientes complejos admite soluciones, resultado conocido como «teorema fundamental del álgebra». Además, su aritmética es sencilla, ya que la suma y la multiplicación de dos

números complejos es la natural, con el ingrediente extra de que cada vez que aparezca i^2 se reemplaza por –1. Por ejemplo:

— Suma: se suman las partes reales y las partes imaginarias. No es posible sumar una parte real con una imaginaria ya que ello supondría sumar cosas diferentes:

$$(1-2i)+(-3+7i)=(1+(-3))+(-2+7)\,i=-2+5i$$

— Multiplicación: se multiplican todos los miembros entre ellos y luego se agrupan en función de si son reales o imaginarios:

$$(1-2i)\cdot(-3+5i)=-3+5i+6i-10i^2=7+11i.$$

La multiplicación de las dos partes imaginarias da como resultado un número real ya que se obtiene i^2 que es igual a –1, un número real.

Eso sí, mientras que en el día a día se comparan constantemente dos números naturales, enteros, racionales o, más generalmente, reales para decidir cuál es el mayor, esto no se puede realizar en general con los números complejos.

La aparente falta de aplicaciones prácticas de este tipo de números provocó que durante muchos años fueran motivo de polémicas y controversias entre la comunidad científica. Sin embargo, el progresivo convencimiento de la utilidad de los números complejos ayudó a su plena aceptación. De hecho, al margen de su intervención inicial en la resolución formal de ciertas ecuaciones, en la actualidad se reconoce la importancia que tuvieron en el planteamiento y resolución de muchos problemas de la física matemática, como el magnetismo, el calor, la electricidad, la gravedad y el flujo de fluidos, entre otros.

Otro factor que ayudó considerablemente a la plena aceptación de los números complejos fue el hecho de que se les pudo someter a una clara interpretación geométrica. En efecto, a la vista de la definición dada, un número complejo $a+bi$ puede verse como un par ordenado (a,b) de números reales. Precisamente, su carácter bidimensional da a las descripciones geométricas un aspecto peculiar, ya que cualquier número complejo puede representarse ahora en el también llamado plano bidimensional complejo (figura 2), identificando los pares $(a,0)$ —es decir, los que no tienen parte imaginaria— con los números reales a —eje de abcisas (horizontal)— y los pares de la forma $(0,b)$ —solo tienen parte imaginaria— con los llamados números imaginarios puros —eje de ordenadas (vertical)—. En particular, el par $(0,1)$ se identifica con la unidad imaginaria i. En la figura 2 se muestran los números complejos $-3+2i$, $4+3i$ y $2-4i$.

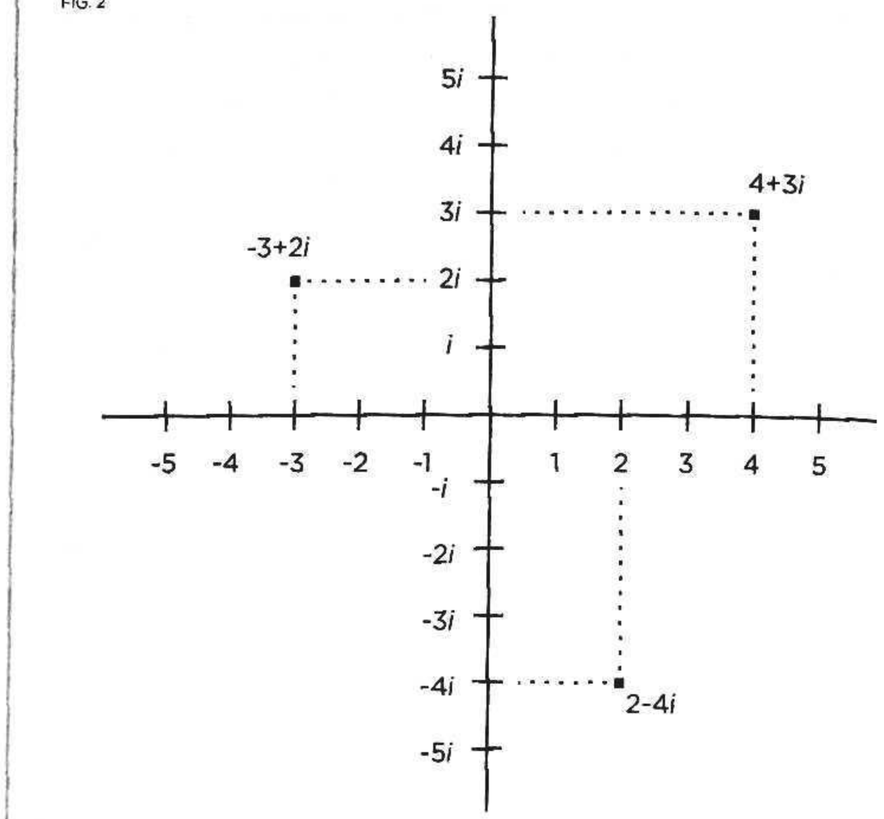
ACEPTACIÓN DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

Gerolamo Cardano

Los números complejos fueron inicialmente considerados como imposibles, y se les toleró únicamente por su utilidad para resolver algunas ecuaciones. Sus primeras y tímidas apariciones, con cierta seriedad, tuvieron lugar en los trabajos de los matemáticos italianos Gerolamo Cardano (1501-1576) y Rafael Bombelli (1526-1572) relacionados con el cálculo de las raíces de la ecuación de tercer grado dada por $ax^3+bx^2+cx+d=0$. Sin embargo, la aceptación del sistema de números complejos no fue fácil y, de hecho, desde el siglo XVI hasta finales del siglo XVIII fueron usados con cierto recelo y desconfianza, hasta el punto de que, cuando aparecían en la resolución de un problema, con bastante frecuencia se interpretaba que tal problema no presentaba solución, ya que por entonces resultaba difícil concebir cualquier realidad física que correspondiese con ellos. En particular, la raíz cuadrada de un número negativo no se podía encontrar en una regla. En este sentido, además de imposibles, palabra empleada por diversos autores, otros términos que se utilizaron en su día para describir a los números complejos fueron «sofisticados», «sin sentido», «inexplicables» o «incomprensibles».

Representación en el plano complejo de los números $-3 + 2i$, $4 + 3i$ y $2 - 4i$.

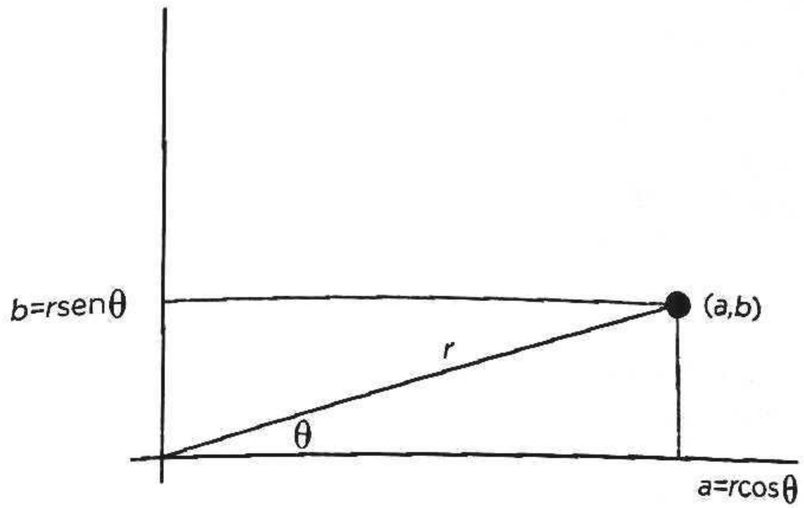
FIG. 2



Consecuentemente, cualquier problema en el que las direcciones de un plano estén involucradas resulta ser una aplicación potencial de los números complejos. En particular, la física está repleta de tales interpretaciones. Por ejemplo, los números complejos resultan ideales para describir ondas, producidas al propagarse una vibración o perturbación originada en una fuente, como ocurre en el sonido, las olas del mar, las ondas sísmicas o la vibración de una cuerda.

Al representar un número complejo $z = a + bi$ en el plano cartesiano, siempre resulta posible trazar un segmento desde el origen de coordenadas $(0, 0)$ hasta el punto (a, b), sobre el que podemos calcular su longitud r y su ángulo 0 respecto del eje de abscisas (figura 3).

FIG. 3



Representación geométrica de un número complejo dados una longitud y un ángulo.

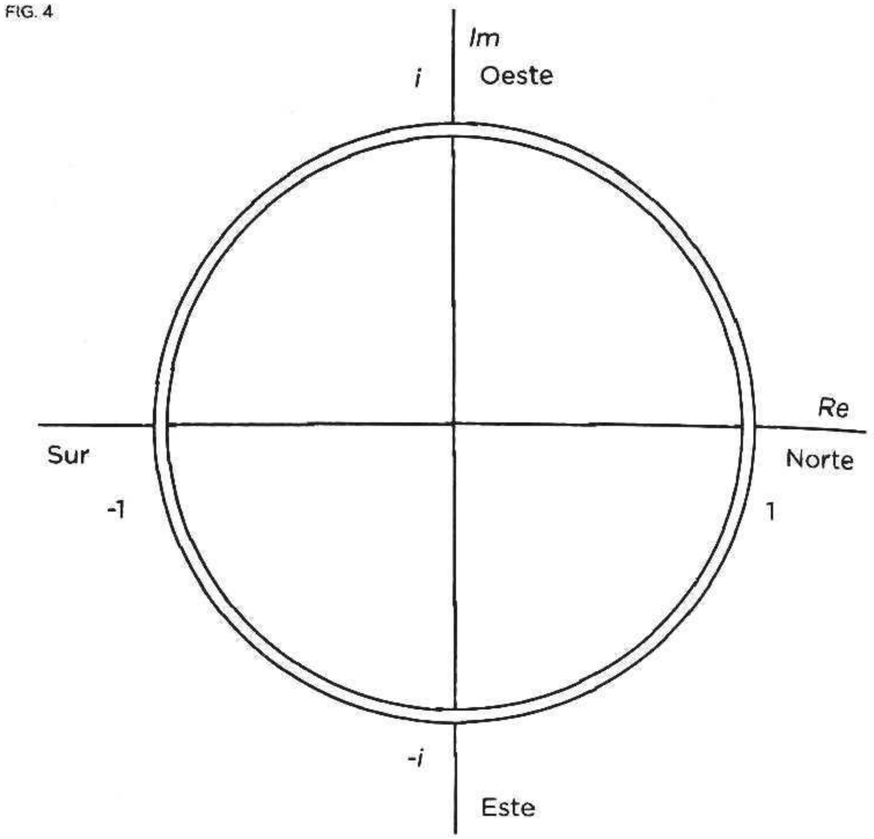
A partir de esta representación y con la ayuda de la trigonometría, se deduce que un número complejo se puede expresar mediante la llamada «forma polar» $re^{i\theta}$, donde se cumple que $e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$ para cualquier ángulo θ, según la famosa fórmula de Euler. Las propiedades de las potencias permiten deducir que al multiplicar dos números complejos sus ángulos se suman, es decir $r_1 e^{i\theta_1} \cdot r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$.

Para un razonamiento más intuitivo del significado de los números complejos, cabe imaginar que se toma por convención que los números reales positivos son los que miran al norte y los negativos los que miran al sur. La recta real solo permite el movimiento hacia el norte o hacia el sur; en cambio, la multiplicación por la unidad imaginaria i proporciona otras posibilidades.

En efecto, si uno se sitúa mirando hacia el norte, la multiplicación por i repercute en un giro de izquierda hacia el oeste (por ejemplo, del número positivo *1* se pasa a la unidad imaginaria i). Una nueva multiplicación por i conduce ahora hacia el sur, cuya unidad es -1. De esta manera se muestra que $i \cdot i = i^2 = -i$. Continuando con este proceso y multiplicando de nuevo por i se llega-

Círculo unitario en el plano complejo.

FIG. 4



ría a la unidad del este, es decir $i^3 = -i$, y una nueva multiplicación por i nos devolvería al norte, $i^4 = 1$. En definitiva, con la introducción de la unidad imaginaria se pasa de la dicotomía sur-norte de la recta real al descubrimiento de los otros dos puntos cardinales este-oeste (figura 4).

La potencia de los resultados de la teoría de funciones de variable compleja, que proporcionan relaciones que pueden establecerse entre conjuntos de números complejos, es tremendamente elevada. Además, tal teoría se ve apuntalada por la belleza de sus demostraciones y por la precisión con la que encajan todas y cada una de sus partes esenciales.

Precisamente, uno de los trabajos que Weierstrass escribió en su primer año de actividad docente en secundaria fue una memoria sobre las llamadas «funciones analíticas» de variable compleja o «funciones holomorfas», que son las que se pueden expresar como series de potencias convergentes —cuya suma tiene un límite— en un entorno abierto de cada uno de los puntos de su dominio de definición, que debe ser un abierto del plano complejo. Esto significa que, para cada punto z_0 del dominio de definición de nuestra función $f(z)$, existen números complejos a_n tales que la igualdad

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

se produce para todo punto z que pertenece a un cierto disco de radio positivo centrado en el punto z_0. En esta ecuación el símbolo $\sum$ representa un sumatorio. Es decir:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = a_0 + a_1 (z - z_0) + a_2 (z - z_0)^2 + \ldots + a_n (z - z_0)^n + \ldots$$

Muchas de las funciones de variable compleja que son solución de ecuaciones importantes de la física gozan de esta propiedad de «analiticidad», también llamada de «holomorfia», que resulta ser extremadamente útil para estudiar su comportamiento. Por ejemplo, las partes real e imaginaria de una función holomorfa satisfacen la ecuación de Laplace, que aparece en muchas ramas de la física teórica, entre ellas la electrostática, la mecánica de fluidos, la mecánica cuántica o la astronomía. Es más, una función $u(x, y)$ es solución de la ecuación de Laplace en un dominio Ω si y solo si es la parte real de una función holomorfa en dicho dominio.

UN PENSADOR EXCEPCIONAL, PERO DESCONOCIDO

El hecho de que Karl Weierstrass no se hubiera marcado como objetivo la publicación de sus primeros trabajos, no impidió que hiciese gala en la confección de los mismos del rigor que identificaría a la postre su legado. Ni resulta descabellado pensar, a tenor de lo expresado en esas obras primerizas, que en 1842 Weierstrass tuviese ya en la cabeza las ideas y los métodos necesarios sobre los que basó sus principales resultados de los años posteriores a

1857, en torno a la teoría moderna de funciones de variable compleja, de la cual fue uno de los matemáticos fundadores.

En aquella época, algunas escuelas e institutos alemanes tenían por costumbre publicar, aunque fuera de manera esporádica, artículos, reportajes o informes elaborados por su profesorado. Uno de ellos era el Instituto Católico de Deutsch-Krone. En 1843, Weierstrass contribuyó a estas publicaciones con un trabajo titulado «Bemerkung über die analytischen Fakultäten» («Observación sobre las facultades analíticas»), referente a un tema muy relacionado con las investigaciones de August Leopold Crelle. Por sugerencia de este, el manuscrito de Weierstrass fue republicado en 1856, para corregir ciertas contradicciones y descuidos que presentaba su trabajo.

Sin embargo, este primer trabajo publicado de Weierstrass y aparecido en las páginas del anuario del curso 1842-1843 del instituto de Deutsch-Krone pasó casi inadvertido para la comunidad científica, al menos al principio. Suerte similar corrieron otros artículos que el joven profesor decidió enviar a revistas locales semejantes, los cuales no tuvieron ningún eco entre los matemáticos de primera línea de la época. Esto se debió a que los institutos enfocaban sus anuarios como una especie de prospectos locales, destinados principalmente a atraer a los padres para inscribir a sus hijos en su centro.

Los biógrafos de Weierstrass relatan también un supuesto desencuentro amoroso sufrido durante su etapa en Deutsch-Krone. Al parecer, en aquella época el matemático conoció a una mujer con la que acabó comprometiéndose, aunque poco después se enteró de la infidelidad de su prometida. Este episodio afectó bastante a Weierstrass, quien, con tal de olvidarlo, posiblemente puso mayor dedicación a la investigación matemática.

LA FUNCIÓN ELÍPTICA DE WEIERSTRASS

En el otoño de 1848, los buenos informes sobre su trabajo le valieron un ascenso a Weierstrass, quien fue trasladado a otra ciudad

prusiana, Braunsberg (la actual Braniewo, también en Polonia), en cuyo Instituto Católico iba a impartir clases durante otros seis años.

Las condiciones de que disfrutaba Weierstrass en Braunsberg mejoraron de forma considerable con respecto a Deutsch-Krone (donde resultaba tremendamente difícil obtener libros), pues el instituto disponía de una pequeña biblioteca propia y el director le brindaba apoyo para sus tareas de investigación. Sin embargo, el pago de los gastos de franqueo todavía resultaba un lujo en aquella época. Por ello, no es de extrañar que Weierstrass viera limitada su correspondencia científica durante el tiempo que trabajó como profesor de secundaria. Además, él carecía de colegas con los que entablar discusiones matemáticas profundas y de acceso a revistas especializadas, circunstancias inconcebibles para la mayoría de los profesores e investigadores que ejercen su trabajo en la actualidad. No obstante, es probable que el aislamiento vivido por Weierstrass diera a sus ideas —no afectadas por las modas de la época— un toque propio de originalidad que de otro modo nunca habrían tenido.

A pesar de este aislamiento científico, Karl Weierstrass continuó compaginando sus obligaciones docentes con las tareas de investigación en Braunsberg. Su enorme dedicación lo llevó a pasar largas noches ensimismado, trabajando. Por entonces realizó importantes avances en torno a las llamadas «funciones abelianas», una generalización natural de las funciones elípticas, lo que le permitió realizar contribuciones de gran alcance a esta área de las matemáticas.

De hecho, la teoría contemporánea de las funciones elípticas debe mucho a Weierstrass. En concreto, la contribución original del matemático en este campo consistió en fundar, de forma rigurosa, la teoría de las funciones elípticas sobre la base firme de las series y productos infinitos, aprovechando muy acertadamente las ventajas del lenguaje de la variable compleja.

Además, Weierstrass obtuvo una ecuación diferencial en una variable compleja que podía servir de fundamento para el estudio de las citadas funciones. Esto hizo que las funciones elípticas estudiadas por el matemático alemán pudieran ser manejadas de forma más simple.

En concreto, la función elíptica de Weierstrass es solución de la siguiente ecuación diferencial:

$$(\wp'(z))^2 = 4(\wp(z))^3 - g_2\wp(z) - g_3.$$

Donde g_2 y g_3 son constantes, $\wp(z)$ es la función elíptica de Weierstrass y $\wp'(z)$ es su primera derivada. Para representar la función de Weierstrass se ha utilizado una letra P estilizada, $\wp$, llamada «P de Weierstrass». Las funciones de esta clase se escriben, generalmente, utilizando la letra citada, cuyo origen se puede atribuir a las lecciones de caligrafía que el matemático y maestro alemán tuvo que impartir a lo largo de sus años como docente en secundaria.

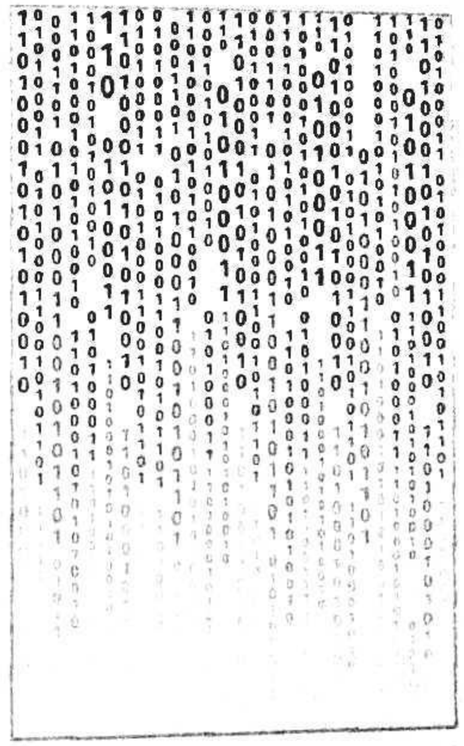
Una primera generalización de las integrales elípticas son las llamadas «integrales hiperelípticas» que Abel trabajó y estudió de un modo detallado, para dar lugar a la teoría de funciones abelianas. El primer trabajo publicado por Weierstrass sobre estas, cuyo título era «Contribuciones a la teoría de Abel», apareció en las páginas del anuario del curso 1848-1849 del Instituto de Braunsberg. De nuevo, este trabajo, incluido en una publicación local, no tuvo ninguna repercusión, de manera que no fue hasta 1854 cuando los avances de Weierstrass en este tema se dieron realmente a conocer, tras la publicación en *Crelle* de una descripción preliminar de sus métodos.

Directa o indirectamente, las funciones elípticas y abelianas han sido el origen de importantes descubrimientos en la mencionada teoría de números. Un ejemplo significativo de ello es el último teorema de Fermat, cuya demostración definitiva, obra del matemático británico Andrew Wiles (n. 1953), hizo uso de sus propiedades.

Hacia 1850, el estado de salud de Weierstrass se complicó de nuevo, pues comenzó a padecer ataques de vértigo y fuertes mareos que se prolongaron alrededor de doce años y mermaron su estado de salud. Estos problemas, atribuidos por algunos al estrés provocado por su intensa actividad diaria, le impidieron desarrollar sus tareas con total normalidad o, al menos, con el ritmo acelerado de los años previos.

En septiembre de 1852 recibió la noticia del fallecimiento de su querido profesor Gudermann en Münster. Es probable que entonces, guiado por el gran entusiasmo que le había mostrado Gudermann, tomase por fin la decisión de preparar un manuscrito susceptible de ser considerado para su posible publicación en una revista que le diera repercusión, como *Crelle*. Este importante momento llegó en el verano de 1853, cuando decidió aprovechar una estancia en casa de su padre en Bad Westernkotten, en el noroeste de Alemania, para

CRIPTOGRAFÍA



Entre las aplicaciones más significativas de la teoría de las funciones elípticas se encuentra su empleo en el cifrado. De hecho, el desarrollo de la criptografía ha permitido, por ejemplo, que sea posible llevar a cabo transacciones comerciales en internet de forma segura. En efecto, la seguridad de los métodos de firma electrónica basados en determinados protocolos criptográficos estriba en el hecho de la imposibilidad práctica de que, en un tiempo razonable, se logre realizar la factorización en números primos de un número entero, fijado de antemano, de centenares de dígitos de longitud. De este modo, a partir de las curvas elípticas, se han desarrollado algoritmos para la factorización de números enteros que resultan mejores, en varios sentidos, que los empleados usando las técnicas convencionales. Por ejemplo, en las aplicaciones que requieren un nivel de seguridad bastante elevado, los algoritmos desarrollados a partir de curvas elípticas consiguen un nivel aceptable haciendo uso de menos recursos y, por tanto, sin necesidad de incrementar su coste de producción.

redactar una memoria sobre funciones abelianas. Su trabajo ofrecía una descripción del método que permitía solventar las complicaciones relativas a la inversión de las integrales hiperelípticas, para resolver un problema importante planteado por Jacobi y abierto des-

APORTACIONES DE WEIERSTRASS AL ANÁLISIS COMPLEJO

Weierstrass fue uno de los fundadores de la teoría moderna de las funciones de variable compleja. Sus principales investigaciones se basaron en la teoría de series y en el estudio realizado sobre funciones elípticas y abelianas, establecidas sobre bases sólidas. En concreto, bajo ciertas condiciones de regularidad, estudió la representación local de una función de variable compleja en su llamado círculo de convergencia, lo que le hizo ver que una función de este tipo posee numerosas propiedades análogas a las de un polinomio. A su vez, esto le permitió considerar el orden de un cero y demostrar el teorema sobre las soluciones analíticas de un sistema de ecuaciones diferenciales mediante su desarrollo en serie. También, aplicando el teorema de factorización que lleva su nombre, construyó las funciones analíticas en todo el plano complejo a partir de sus ceros.

Un matemático pionero

Además, Weierstrass utilizó con frecuencia el concepto de «prolongación analítica de una función de variable compleja», incluido ya en su memoria de 1842 y que se convirtió en una herramienta fundamental en el trabajo del matemático. De esta forma, a partir de las funciones holomorfas en todo el plano complejo, pasó a construir las funciones meromorfas, que pierden la propiedad de holomorfía en un conjunto discreto de puntos donde presentan polos, de forma análoga a como se transita de las funciones polinómicas a las racionales. Al respecto, Weierstrass fue pionero en la distinción entre los llamados «polos» o «singularidades finitas» y las singularidades esenciales de una función compleja. De hecho, el teorema de Casorati-Weierstrass describe el comportamiento de tales funciones alrededor de una singularidad de tipo esencial.

de 1832. De esta forma, Weierstrass envió un resumen a *Crelle*, donde fue muy bien recibido su manuscrito, titulado «Zur Theorie der Abelschen Functionen» («Sobre la teoría de las funciones abelianas»). El trabajo se publicó en el volumen 47 de la revista.

Era la primera publicación de Weierstrass en una revista importante, tanto como la propia repercusión de su texto, cuyo impacto en la comunidad matemática alemana daría un giro total a su vida.

Los ecos de este artículo llegaron pronto a la Universidad de Königsberg, donde Jacobi —fallecido en 1851— había hecho sus grandes descubrimientos. En concreto, Friedrich Julius Richelot (1808-1875), antiguo alumno de Jacobi, se dio cuenta inmediatamente de la trascendencia de los resultados de Weierstrass y no dudó un instante en tratar de convencer a los responsables de su universidad para que le concedieran el grado de doctor *honoris causa*, lo que sucedió el 31 de marzo de 1854. El propio Richelot, acompañado de una delegación de Königsberg, se trasladó a Braunsberg para entregar el diploma en mano a Weierstrass. De hecho, durante el banquete de celebración organizado por el director del Instituto de Braunsberg, Richelot afirmó: «todos hemos encontrado a nuestro maestro en Weierstrass». Fueron unas palabras que reconfortaron enormemente al matemático renano.

> «La solución al problema de la inversión de Jacobi, que por primera vez fue proporcionada por Weierstrass [...], me parece que es uno de los mayores logros del análisis.»
>
> — DAVID HILBERT, EN SU ARTÍCULO DEDICADO A LA MEMORIA DE WEIERSTRASS.

Tiempo después, incluso Carl Wilhelm Borchardt (1817-1880), editor de *Crelle* entre 1856 y 1880, se acercó a Braunsberg para felicitar a Weierstrass, lo que marcó el inicio de una cálida amistad que se prolongó hasta la muerte de aquel.

El 29 de septiembre de 1855, el ministro de Educación de Prusia ascendió a Weierstrass a profesor titular de instituto, y le con-

cedió un permiso de un año, para el curso 1855-1856, con la finalidad de que prosiguiese sus trabajos científicos con plena dedicación y libertad, sin la obligación de impartir clases a sus alumnos de Braunsberg.

El artículo de Weierstrass no solo tuvo repercusión en tierras alemanas. Este trabajo, inmediatamente traducido al francés, fue publicado en el mismo año de 1854 en el volumen 19 del *Journal de mathématiques pures et appliquées*, otra revista puntera en la época. Entre los matemáticos franceses que alabaron el texto cabe destacar a Cauchy, cuyo nombre aparecería vinculado más adelante a parte de la obra del matemático alemán.

En 1856, Weierstrass publicó en *Crelle* otro artículo, titulado «Theorie der Abel'schen Functionen» («Teoría de las funciones abelianas»), donde probó los resultados solo descritos en 1854, lo que dio una gran expansión a la teoría de funciones abelianas. Este logro lo conduciría de forma definitiva a Berlín.

Pese a las grandes dificultades con las que se había encontrado, Weierstrass desarrolló una labor investigadora que se reveló notable, tanto por su nivel como por su poderosa originalidad. Es posible afirmar, incluso, que los quince años en los que desarrolló su actividad en la enseñanza secundaria fueron los más fecundos de su vida como investigador.

CAPÍTULO 2

El padre del análisis moderno

Muchos historiadores y matemáticos consideran a Weierstrass como el padre del análisis moderno. Su desarrollo lógico de este campo de estudio fue ganándose poco a poco la aceptación y el respeto de la comunidad matemática, hasta convertirse en la base de las investigaciones posteriores. Hoy resulta prácticamente imposible leer un tratado sobre el análisis en el que no aparezca el nombre de Weierstrass, dadas sus contribuciones en casi todos los ámbitos de esta rama de las matemáticas.

Gracias a la gran repercusión de sus investigaciones publicadas en *Crelle*, Weierstrass abandonó el anonimato en que vivía, así como la falta de reconocimiento por parte de sus colegas de profesión, para convertirse en un hombre respetado y en un matemático codiciado por distintas universidades.

De entrada, el destino natural de Weierstrass tendría que haber sido la Universidad de Breslavia, ciudad situada actualmente en el suroeste de Polonia, donde había una plaza que el profesor Ernst Kummer (1810-1893) había dejado vacante. Este prestigioso docente se trasladaba a la Universidad de Berlín para cubrir la vacante dejada por Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859), quien, a su vez, marchaba a Gotinga a ocupar la de Gauss, fallecido en febrero de 1855. Sin embargo, al parecer tanto Kummer como Dirichlet movieron hilos para evitar que Karl Weierstrass fuera a Breslavia y consiguieron su traslado a Berlín. De este modo, el 14 de junio de 1856, Weierstrass aceptó la oferta para ocupar una plaza de profesor en el Königliches Gewerbeinstitut (Instituto Industrial) en aquella ciudad, a la sazón capital del Estado prusiano. Un mes después fue invitado a ejercer de profesor asociado en la prestigiosa Universidad de Berlín, donde realmente deseaba estar. Weierstrass aceptó de inmediato la propuesta y, tras llegar a un acuerdo con el Königliches Gewerbeinstitut, compaginó la labor docente en ambas instituciones.

El 19 de noviembre de 1856 recibió otro reconocimiento a su labor, al ser elegido miembro de la Academia de las Ciencias de Berlín. El nombramiento dio a Weierstrass derecho a impartir cursos y conferencias de acuerdo con sus criterios y conocimientos específicos.

Inicialmente, el matemático se estableció en Berlín con sus dos hermanas, Klara y Elisa. Tras la muerte de la madrastra de todos ellos, en 1859, se les unió su padre, quien pasó en Berlín los últimos diez años de su vida.

Weierstrass mantuvo una actividad frenética durante los primeros años en su nueva ciudad de residencia. Junto con las tareas propias de investigación, inicialmente impartía doce horas lectivas semanales en el Königliches Gewerbeinstitut y dos lecciones completas en la Universidad de Berlín. Además, al poco tiempo de su llegada, Weierstrass y Kummer presentaron una solicitud al Ministerio de Cultura Alemán para crear el primer seminario de matemáticas en la Universidad de Berlín, puesto en marcha en 1860.

Los problemas de salud no tardaron en reaparecer. El 16 de diciembre de 1861, Weierstrass sufrió un grave colapso que le mantuvo alejado de la actividad científica y didáctica hasta el curso 1862-1863. Después de dicho episodio, su estado de salud continuó siendo delicado: padecía bronquitis y flebitis, estaba falto de fuerzas físicas y a menudo debía permanecer sentado mientras impartía sus lecciones. Sin embargo, las afecciones no impidieron que fuese nombrado profesor titular de la Universidad de Berlín, el 2 de julio de 1864. De este modo, no había duda de que el resto de sus años se centrarían en exclusiva en la universidad, donde impartió lecciones hasta 1889, cuando empezó a preparar la publicación de sus obras.

SOBRE LOS CONCEPTOS DE LÍMITE Y CONTINUIDAD

Un hito en la carrera de Weierstrass fue su contribución esencial a la transformación completa de la base del cálculo, con unas definiciones claras y precisas que eliminaron todo rastro de misterio o intuición geométrica. De hecho, en la década de 1860 presentó varios enfoques y resultados que aclararon de forma considerable diversas nociones fundamentales del análisis matemático y le otorgaron la solidez necesaria. Así, esta rama de las matemáticas empezó a desarrollarse completamente a partir de la formación rigurosa del concepto de «límite».

LÍMITES

En términos generales, la palabra «límite» hace referencia a algo que no puede exceder ciertas demarcaciones o áreas. En el día a día aparecen puntos de referencia que no se deben rebasar, lo que provoca que los límites formen parte integrante de la cotidianidad. Así, por ejemplo, el límite de velocidad indica la velocidad máxima —o mínima— a la que se puede viajar legalmente en un automóvil, de la misma forma que el límite de un país indica la frontera con un Estado adyacente.

Desde el punto de vista matemático, el límite permite entender el comportamiento de una sucesión o función cuando la variable se acerca a un punto dado, y sirve para definir conceptos fundamentales como «convergencia», «continuidad» o «derivación», entre otros. Por ejemplo, en la secuencia de números dada por $1/n$, $n = 1,2,3...$, a medida que n se hace cada vez más grande, los valores de los números en la secuencia se hacen más y más pequeños.

Así, el resultado se aproxima cada vez más a cero, pero sin llegar nunca a dicho número. Por lo tanto, el límite aparece en este contexto como la tendencia de una sucesión a acercarse a un determinado valor, sin alcanzarlo necesariamente.

Conocer las tendencias resulta de gran importancia en muchas áreas de la vida cotidiana, para predecir comportamientos a corto, medio o largo plazo. En efecto, muchas veces los límites se usan de manera implícita y uno no es consciente de ello. Por ejemplo, a partir del consumo de un recurso —como podría ser, por ejemplo, el petróleo que alimenta los medios de transporte o el dinero depositado en un banco— en un período de tiempo determinado,

el cálculo del límite puede servir para predecir cuándo se agotará dicho recurso bajo ciertas condiciones.

A finales del siglo XVIII y principios del XIX, las obras de un gran número de matemáticos reflejaban la necesidad de construir la teoría de límites como base del análisis matemático. Pero tuvo que llegar Weierstrass, en la década de 1860, para que la teoría de límites se expresara con rigor matemático.

Un ejemplo intuitivo de la definición matemática de límite se obtiene al considerar el caso de inscribir un polígono regular en un círculo. Puede apreciarse que la diferencia entre el perímetro de la figura interior y la longitud de la circunferencia del círculo disminuye al incrementarse el número de lados del polígono (figura 1). En realidad, la diferencia puede hacerse tan pequeña como se quiera eligiendo un número suficiente de lados del polígono. De este modo, la figura límite de este proceso es el círculo, pues, aunque se incremente infinitamente el número de lados del polígono, tanto la longitud límite del perímetro como el área límite a las que tenderá —sin llegar a alcanzar nunca ninguna de las dos— corresponden a las del círculo.

Otra forma intuitiva de enfocar este proceso consiste en dividir un círculo de longitud L y de radio r en sectores circulares del mismo tamaño y, a continuación, disponerlos conjuntamente en forma de banda (figura 2). Obsérvese que si el número de sectores circulares tiende a infinito, entonces la banda, cuya área es igual a la del círculo, se aproxima a un rectángulo de base igual a la

De izquierda a derecha disminuye la diferencia de longitud entre el perímetro del polígono regular y del círculo.

FIG. 1

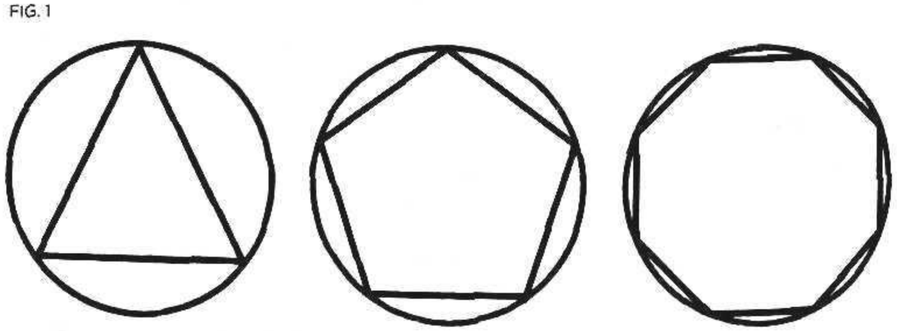
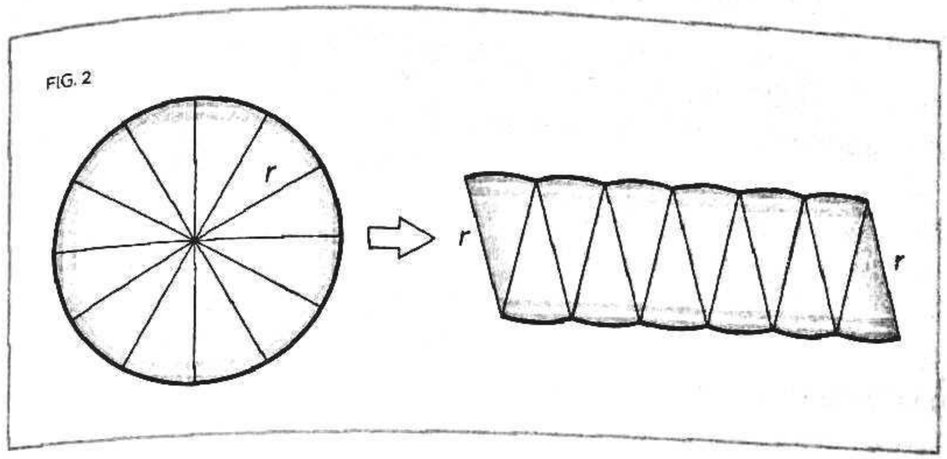


FIG. 2



Sectores circulares dispuestos en forma de banda.

mitad del perímetro de la circunferencia y de altura igual al radio. Se deduce así la relación existente entre el área del círculo y su perímetro, en concreto, el área del círculo es igual a la mitad de su perímetro multiplicado por el radio.

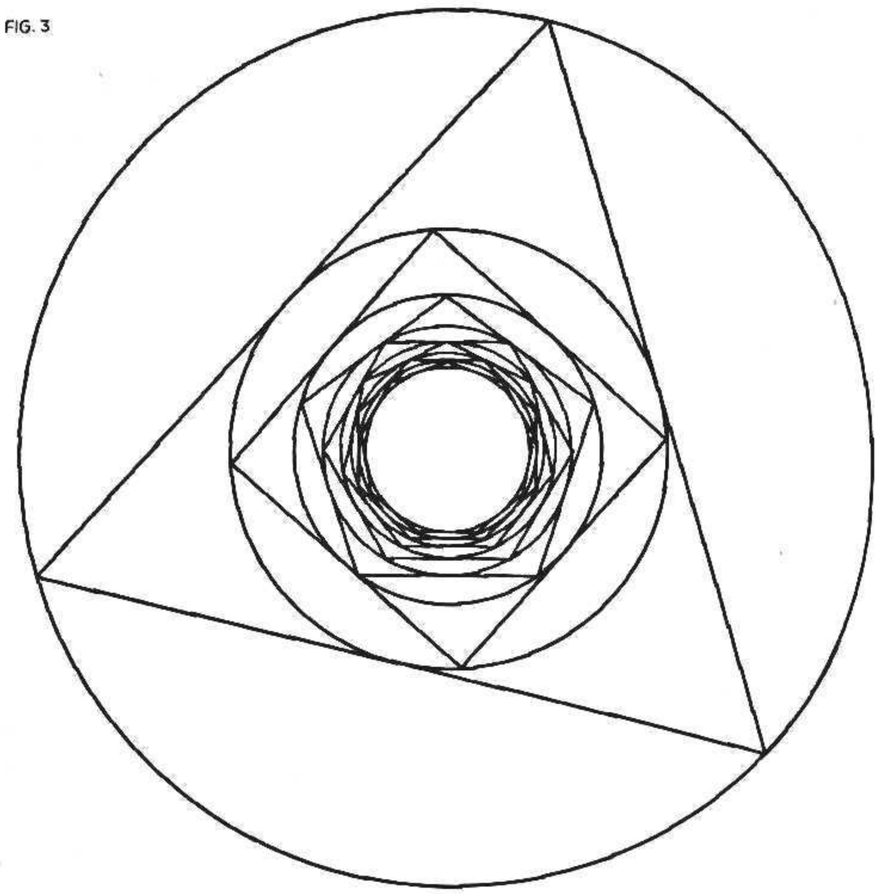
Esta idea de límite ya fue usada por algunos matemáticos griegos de la Antigüedad, como fueron los casos de Eudoxo de Cnidos (ca. 390-ca. 337 a.C.) y Arquímedes de Siracusa (ca. 287-ca. 212 a.C.) para calcular ciertas áreas y volúmenes. De hecho, se sabe que Arquímedes consiguió realizar una aproximación bastante precisa del número π a partir del cálculo del perímetro de polígonos regulares de hasta noventa y seis lados, que se hallaban inscritos o circunscritos en circunferencias.

Sin embargo, en ocasiones la situación resultante no resulta tan evidente y la intuición puede inducir a error. A continuación, se describen un par de casos en los que la realidad desmiente las suposiciones. Para plantear el primer ejemplo, se parte de una circunferencia de radio 1 y se inscribe en ella un triángulo equilátero. A partir de este triángulo se traza una circunferencia inscrita en la que, a su vez, se inscribe un cuadrado. En este último se inscribe otra circunferencia en la que se inscribirá un pentágono regular. De esta forma, aumentando uno a uno el número de lados del polígono regular, se repite el proceso de forma indefinida (figura 3).

A primera vista se podría suponer que los radios —cada vez menores— de las circunferencias concéntricas así obtenidas se aproximan a cero como valor límite. Sin embargo, esto no es así.

Circunferencia y polígonos regulares que ven aumentar en uno el número de lados en cada iteración, inscritos de forma alterna.

FIG. 3



En realidad, la idea de fondo es que el proceso de inscribir figuras cada vez menores se aproxima a una figura límite a medida que los círculos y los polígonos inscritos van siendo cada vez más parecidos. De hecho, teniendo en cuenta que el radio de una circunferencia inscrita en un polígono regular coincide con la apotema del polígono (la menor distancia entre el centro y cualquiera de sus lados) y que, por trigonometría básica, la apotema de un polígono regular de n lados se puede calcular como el producto de $\cos\left(\pi/n\right)$ y del radio del polígono (el de la circunferencia inicial en el que se inscribe), entonces el valor límite del radio de las circunferencias en el proceso anteriormente descrito está dado por el producto infinito

$$\cos\left(\pi/3\right)\cdot\cos\left(\pi/4\right)\cdot\cos\left(\pi/5\right)\cdot\ldots\cdot\cos\left(\pi/n\right)\cdot\ldots,$$

cuyo valor se conoce como la constante de Kepler-Bouwkamp y aparece aproximado por 0,114942... Esto quiere decir que si se iterase hasta el infinito el proceso descrito anteriormente, la circunferencia más pequeña que se conseguiría alcanzar tendría un radio igual a la constante de Kepler-Bouwkamp. Resulta interesante constatar que, si se realiza el proceso inscribiendo siempre el mismo polígono regular, sí se anula el radio en el infinito; mientras que si hacemos este proceso incrementando el número de lados, entonces el radio se estabiliza en un valor no nulo.

Para plantear el segundo ejemplo, se parte de un segmento *AB* de longitud 2 sobre el que se construye una semicircunferencia de radio 1. La longitud del arco de esta semicircunferencia será π, pues se trata de la mitad de la longitud total de una circunferencia de radio 1.

A continuación, dividimos *AB* en dos subintervalos iguales y trazamos sobre el segmento inicial *AB* una curva formada por dos semicircunferencias construidas sobre cada uno de los dos subintervalos que, en esta ocasión, tendrán radio $1/2$. Aquí conviene observar que la longitud de la nueva curva es igual a $\pi/2+\pi/2=\pi$. En la siguiente iteración, cada uno de los dos subintervalos anteriores se vuelve a dividir en dos iguales y se traza una nueva curva como resultado de la construcción de cuatro semicircunferencias de radio $1/4$ sobre cada uno de los subintervalos considerados. De nuevo, la longitud de esta nueva curva es igual a π. Podemos reiterar este proceso de forma indefinida, para obtener consecutivamente curvas de la misma longitud, igual a π, y vernos así tentados a concluir que la longitud de la curva límite de esta construcción sigue siendo π.

Sin embargo, en el proceso llevado a cabo, la curva se aproxima de manera uniforme tanto como deseemos al segmento *AB* inicial, con lo que la longitud en el límite será igual a 2. Este proceso pone de manifiesto que las propiedades de los elementos de una sucesión no son heredadas necesariamente por su límite, por lo que hemos de ser muy cuidadosos a la hora de abordar una teoría de los mismos.

Para el siguiente ejemplo numérico, considérense las sumas finitas dadas por:

$$\frac{1}{2}=0,5$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{7}{4}=0,75$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=0,875$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=0,9375$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}=0,96875$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}=0,984375$$

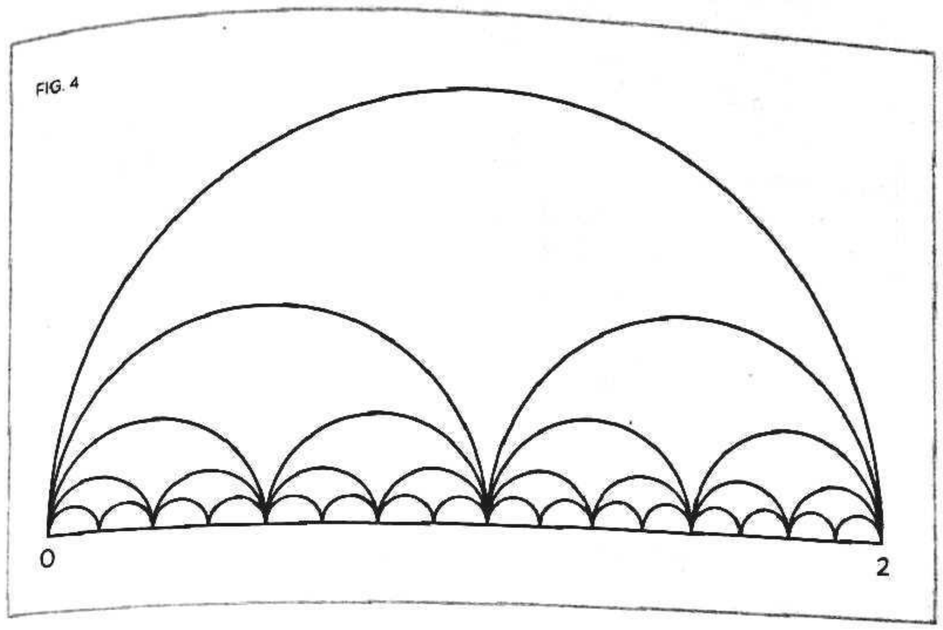
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}=0,9921875.$$

Si se procede de la misma forma, extendiendo el proceso hasta el infinito, el matemático se encuentra ante lo que se conoce como una «serie numérica», concepto que lleva implícita la noción de límite, y que en este caso concreto viene dada por:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots=\sum_{n\geq 1}\frac{1}{2^n}.$$

Cada término es la mitad del precedente: $\frac{1}{4}$ es la mitad de $\frac{1}{2}$, también $\frac{1}{8}$ es la mitad de $\frac{1}{4}$, etcétera. Así, partiendo del número $\frac{1}{2}$, nos encontramos ante la suma de una cantidad infinita de determinados números positivos, cuyo resultado parece que se acerca al número 1. En efecto, conforme aumenta el número de términos a sumar, el resultado tiende al número 1. Por ejemplo, sumando los diecisiete primeros términos se obtiene:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{131072}=0,999992371.$$



Proceso de construcción de la curva formada por semicircunferencias.

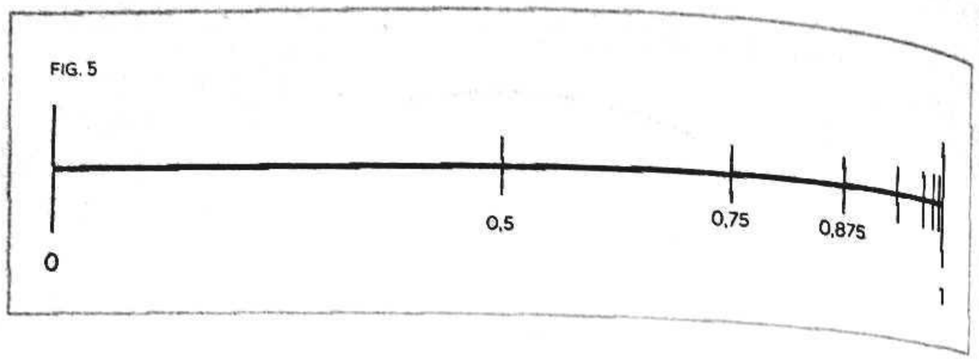
Sin embargo, por muchos términos que añadamos nunca podremos alcanzar exactamente el valor de 1.

Imaginemos el movimiento de una pelota de pádel o de baloncesto que cada vez que rebota contra el suelo pierde la mitad de su altura. Si partimos de una altura igual a 1 metro, la serie numérica anterior puede ser interpretada como la suma de las alturas máximas alcanzadas por la pelota a partir de su primer bote sobre el suelo, es decir, 0,5 m, 0,25 m, 0,125 m, 0,0625 m, etc., que conforman lo que se llama una progresión geométrica de razón 0,5. De modo equivalente, si consideramos una línea recta en la que representamos los valores que vamos obteniendo a medida que añadimos términos a la suma considerada, entonces la diferencia con el número 1 se va reduciendo a la mitad en cada uno de los pasos efectuados.

La figura 5 da también pie para comentar la denominada «paradoja de la dicotomía». Imaginemos que alguien quiere realizar un recorrido de un kilómetro. Para llegar al final se ha de alcanzar en un momento dado la mitad del camino (el punto 0,5 km). De la misma manera, antes de llegar al final se tienen que alcanzar las tres cuartas partes del camino (el punto 0,75 km). De una cuarta parte que queda por recorrer, hemos de completar la mitad (el

Representación en la recta real de las primeras sumas parciales de $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$.

FIG. 5



punto 0,875 km), y así sucesivamente. Por tanto, nos encontramos ante un número infinito de puntos kilométricos por los que hemos de pasar si queremos llegar a la meta, con lo cual, ¿llegaremos a cumplir nuestro objetivo?

La respuesta es evidentemente positiva, ya que la serie que tenemos entre manos es convergente (una serie geométrica de razón 0,5).

En la figura 6 podemos ver dos pruebas visuales de que la serie toma el valor 1. La primera imagen corresponde a un primer cuadrado de área igual a 1 y lados de longitud 1, y en la segunda aparece un triángulo rectángulo de área igual a 1 y catetos de longitud $\sqrt{2}$.

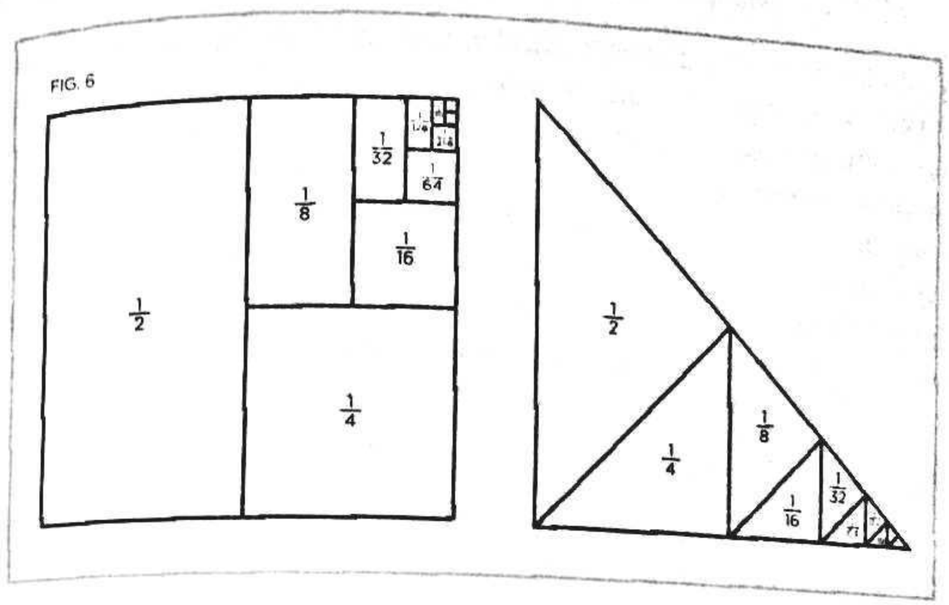
Lo más importante de esta serie numérica es que hace falta un criterio formal según el cual pueda afirmarse, sin ningún tipo de ambigüedad, que

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots=1$$

o, de manera equivalente, que 1 es el límite de la citada serie. Pues bien, de esta formalización se ocupó Weierstrass al sistematizar brillantemente el comportamiento de estos objetos matemáticos que presentan multitud de aplicaciones en la vida real, por ejemplo en el cálculo de los intereses bancarios y de la producción en serie, en el control de las competiciones deportivas, en la cría de ganado, etc. La idea radica en el siguiente tratamiento: a partir de un número real positivo cualquiera que denotaremos por ε, si consderamos el valor $1-\varepsilon$, entonces podemos encontrar un número suficientemente grande n_0 de términos consecutivos en la

Visualización del valor de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$.

FIG. 6



suma empezando por el primero, de tal forma que el valor resultante al sumar estos términos se sitúe entre $1-\varepsilon$ y 1. De hecho, si incluyéramos más de n_0 términos, el valor resultante de la suma seguiría cumpliendo esta propiedad. Esta operación podrá realizarse siempre, por muy pequeño que sea el valor de ε que inicialmente consideremos. El 1 es el único número que verifica esta propiedad para esta serie, concluyendo así que 1 es el límite de la serie.

En términos menos rigurosos diríamos que, incluyendo un número suficiente de términos a la suma planteada, podemos hacer que la diferencia entre el resultado de la suma y el 1 sea tan pequeña como queramos. Sin embargo, si comparamos esta explicación con la anterior en términos de ε y n_0, no hay duda de que Weierstrass presentó una definición depurada del concepto de límite envuelto en esta serie.

«El cálculo del siglo XIX alcanzó su perfección clásica con las épsilons y deltas numéricas del análisis riguroso de Weierstrass.»

— Eric Temple Bell.

Esta diferencia es la que da rigor a las expresiones «tan pequeño como queramos», «infinitamente pequeño» o «aproximarse

indefinidamente», que eran con las que básicamente se trabajaba antes de la formalización efectuada por Karl Weierstrass y que dejaban espacio al planteamiento de ambigüedades. Esto permitió utilizar un lenguaje algebraico y más adecuado, en lugar de palabras sugerentes pero vagas, en las distintas definiciones y resultados matemáticos cuyos enunciados hacen uso de esta propiedad. De hecho, el tratamiento que se sigue empleando en la actualidad es el que nos facilitó el propio Weierstrass.

Las funciones son indispensables en cualquier área de la actividad humana, ya que la descripción de una determinada situación o proceso se da con la ayuda de un modelo matemático cuyo núcleo fundamental aparece dado por una función. Para analizar este comportamiento, muchas veces es suficiente el estudio de las funciones definidas en un subconjunto de la recta real y que toman valores reales (en general, no resulta difícil adaptarlas a muchas aplicaciones de la vida cotidiana).

SUCESIONES NUMÉRICAS

Una sucesión numérica $\{a_n\}_{n\geq 1}$ es una secuencia ordenada de números, dispuestos entre sí mediante una ley de formación, que se formaliza como una aplicación de los números naturales sobre otro conjunto numérico. Por ejemplo, la conocida sucesión de Fibonacci es aquella en que, comenzando por los valores 0 y 1, cada término es el resultado de sumar los dos que lo preceden:

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144...

Una de las propiedades curiosas que verifica la sucesión de Fibonacci es que el cociente entre un término y el inmediatamente anterior va oscilando por encima y por debajo del llamado número áureo, denotado por

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1{,}6180339887,$$

y que a medida que avanzamos en la sucesión, la diferencia de este cociente con el valor de ϕ se va haciendo cada vez menor, teniendo precisamente como límite ϕ, que es un número irracional que recibe su nombre del escultor griego Fidias (siglo IV a.C.), quien utilizó ampliamente sus propiedades en su destacada obra artística.

$$\frac{2}{1}=2,\frac{3}{2}=1{,}5,\frac{5}{3}\cong 1{,}667,\frac{8}{5}=1{,}6,\frac{13}{8}=1{,}625,\frac{21}{13}\cong 1{,}615,\frac{34}{21}\cong 1{,}619,\frac{55}{34}\cong 1{,}617...$$

Pues bien, igual que ocurría con el proceso anteriormente descrito a través de una serie numérica, la formalización heredada de Weierstrass del hecho que

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\phi, \text{ siendo } a_n$$

el término n-ésimo de la sucesión de Fibonacci, consiste en afirmar que dado $\varepsilon > 0$ existe un número natural n_0 tal que

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}-\phi\right| < \varepsilon \text{ para cualquier } n > n_0.$$

El número áureo

Al respecto del número áureo, imaginemos un segmento de una longitud dada l que dividimos en dos partes. Así, sean a y b las longitudes de estos dos segmentos ($a+b=l$) y supongamos que a es mayor que b. Pues bien, el número áureo aparece cuando la relación entre la longitud total l y el segmento mayor a es igual a la relación entre el segmento mayor a y el menor b, es decir,

$$\frac{a+b}{a}=\frac{a}{b},$$

lo que da lugar a la ecuación $x^2-x-1=0$, siendo $x=a/b$, cuya solución positiva es el número de oro ϕ. Tanto la sucesión de Fibonacci, descrita inicialmente como la solución a un problema de cría de conejos, como el propio número áureo, aparecen en una gran cantidad de objetos de la naturaleza y en multitud de contextos, como en la disposición en espiral que se observa en las escamas de una piña y las pipas de un girasol, la cantidad de pétalos de muchas flores, las nervaduras de las hojas de algunos árboles, el grosor de las ramas, el caparazón de un caracol, las hojas de una palmera, el diseño de las tarjetas de crédito, carnés de identidad o cajetillas de tabaco, el Panteón, la pirámide de Keops, la torre Eiffel, los anillos de Saturno, etc.

Así pues, si en lugar de trabajar con sucesiones lo hacemos con funciones reales $f(x)$, utilizadas constantemente para expresar la dependencia entre dos magnitudes o cantidades variables, frecuentemente nos interesa averiguar el comportamiento cuando la variable independiente x se aproxima a un determinado valor x_0. En otras palabras, queremos averiguar si la función que se aproxima a un determinado valor, L, aumenta indefinidamente, disminuye indefinidamente o no tiene un comportamiento claramente definido. En este sentido, la definición de límite de una función en términos de épsilon y delta que hoy empleamos fue presentada por primera vez por Weierstrass en un curso sobre cálculo diferencial (1861). De hecho, alguno de sus discípulos, bajo la influencia directa de las lecciones de Weierstrass, publicaron años después una definición de límite que, salvo notación, es la que aparece actualmente en los textos usuales, es decir, la definición épsilon-delta dada básicamente por: «El límite de $f(x)$ cuando x tiende a x_0 es igual al número real L cuando para todo número real positivo ε existe un número real positivo δ tal que si la distancia entre x y x_0 es menor que δ (con un valor x distinto de x_0 tomado en el intervalo donde la función $f(x)$ existe), entonces la distancia entre la imagen de x y L es menor que ε.

La idea intuitiva —y de carácter pedagógico— es que los valores de $f(x)$ están arbitrariamente próximos a L siempre que los valores de x se tomen suficientemente cercanos a x_0 pero sin tomar el valor x_0. Sin embargo, en la definición dada podemos apreciar de nuevo un lenguaje y un simbolismo preciso e inequívoco.

En concreto, Cauchy publicó en 1821 una obra muy influyente, bajo el título *Cours d'analysis*, dotada de una gran estructura lógica, en la que basó todo su análisis en el concepto de límite, rechazando planteamientos anteriores y dando un carácter más aritmético, aunque aún impreciso, a sus definiciones. Por ejemplo, la definición de límite que propuso era la siguiente: «[...] cuando los sucesivos valores que toma una variable se aproximan indefinidamente a un valor fijo, de manera que terminan por diferir de él en tan poco como queramos, este último valor se llama el límite de todos los demás». A este respecto, el teólogo, filósofo y matemático checo Bernard Bolzano (1781-1848) también realizó un

tratamiento efectivo, pero su trabajo fue relativamente desconocido hasta la segunda mitad del siglo XIX. En cualquier caso, tanto el nuevo estilo de Cauchy, cuya aceptación fue complicada y lenta, como la reforma posterior de Weierstrass, necesitaron muchos años para su generalización en los centros de enseñanza.

Siguiendo el hilo conductor de esta sección, la noción de límite era ya, en esta época, una noción matemática que servía como soporte a otras como la continuidad, derivada e integral. Hagamos ahora hincapié en la continuidad, ya que, por ejemplo, el estudio a través del uso de funciones continuas resulta muy importante para prever cuál será la evolución a corto, medio o largo plazo de determinadas magnitudes o comportamientos relativos a nuestra vida diaria. De hecho, al igual que sabemos que la temperatura no cambia de manera abrupta de un segundo a otro, pues debe pasar forzosamente por todos los grados intermedios, la noción intuitiva de continuidad de una función real $f(x)$ involucra el hecho de que los valores numéricos de las diferencias $f(x+\alpha)-f(x)$ decrecen indefinidamente cuando, a su vez, decrece indefinidamente el incremento α. Esta es la definición, *grosso modo*, que los propios Cauchy y Bolzano manejaban en sus escritos.

De nuevo, la definición de continuidad que propuso Weierstrass, en términos muy parecidos a la de límite, tiene el mérito de ser más precisa que las que se manejaban anteriormente. Al mismo tiempo, también introdujo la noción de «vecindad» —o «entorno»— de un punto x_0, indicando que se compone de todos los puntos x tales que $x-x_0$ en valor absoluto no sobrepase una cota determinada. De esta forma, la definición de continuidad de una función real de variable real, heredada de Weierstrass y la que se maneja actualmente, se puede establecer en los siguientes términos: «Una función $f(x)$ es continua en $x=x_0$ si para un número positivo arbitrariamente pequeño ε, es posible encontrar un entorno de x_0 de amplitud $\delta>0$ tal que para todos los valores x en ese entorno (y en el propio dominio de definición de la función) se cumple $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$».

La función f describe la forma en que una magnitud física depende de otra. Por ejemplo, supongamos que esta función nos

CAUCHY Y BOLZANO

Cauchy nació en París, en el seno de una familia acomodada, el mismo año en el que estalló la Revolución francesa. Su padre quiso que tuviera una buena formación humanística, aunque posteriormente y gracias al consejo de los grandes matemáticos Pierre-Simon Laplace (1749-1827) y Joseph Louis Lagrange (1736-1813), que eran amigos de la familia, comenzó a estudiar matemáticas y se diplomó como ingeniero de caminos en la Escuela Politécnica de París. Augustin Louis hizo gala de una firme adhesión a los Borbones, lo que le supuso algunos problemas y, de hecho, durante el período 1830-1838 vivió un exilio voluntario, primero en Suiza y después en Turín y Praga. Más tarde, ya de vuelta en París, recibió los honores del emperador Napoleón III y fue nombrado profesor de Astronomía en la Sorbona, en 1848. Cauchy fue uno de los matemáticos más brillantes de su generación; su obra es inmensa y probablemente solo el prolífico Leonhard Euler le supere en este aspecto. A diferencia de otros matemáticos que no tenían demasiada preocupación por los aspectos pedagógicos, en los manuscritos de Cauchy estaba siempre presente un afán didáctico, y notorio fue su interés por el rigor matemático.

Augustin Louis Cauchy.

La aportación de Bolzano

Bernard Bolzano nació, vivió y murió en la ciudad de Praga. Tras cursar estudios de filosofía y matemáticas se ordenó clérigo. Pese a ello, la docencia era su vocación y enseñó teología en la Universidad de Praga, donde consiguió una cátedra en 1804. Su popularidad fue en aumento entre sus colegas profesores y estudiantes por sus cualidades intelectuales. Sin embargo, en 1819 fue destituido de su cátedra por su supuesta oposición al dominio austríaco y su pacifismo. Bolzano no encajaba en los ideales y posiciones conservadoras establecidas por el Gobierno, lo que le llevó a ser censurado y condenado al ostracismo. Sin embargo, no dejó de escribir, aunque las difíciles condiciones en las que desarrolló su trabajo hicieron que este permaneciera inédito hasta muchos años después de su muerte. Lo fundamental de sus hallazgos empezó a conocerse a partir de 1870 y, aun así, gran parte de la obra no sería fácil de consultar hasta que la Sociedad Bohemia de Ciencias la publicase en 1930. Podríamos decir que ambos se adelantaron en un cierto sentido al trabajo desempeñado posteriormente por Weierstrass y otros analistas posteriores.

Bernard Bolzano.

relaciona la presión ejercida por un gas, encerrado en un recipiente de volumen fijo, en función de la temperatura. En realidad, rara vez podremos medir la temperatura en un momento dado con total exactitud; en lugar de su valor exacto x_0 medimos un valor aproximado x, cometiendo un error $|x-x_0|$. Como consecuencia de ello, cuando calculamos el valor de la magnitud dependiente (en nuestro caso, la presión), no obtenemos su valor exacto $f(x_0)$, sino el valor $f(x)$, cometiendo un error $|f(x)-f(x_0)|$. La continuidad de la función f en el punto x_0 nos garantiza que podemos controlar el error en la magnitud dependiente, siempre que podamos medir la temperatura con suficiente exactitud. Más concretamente, la continuidad permite garantizar que el error obtenido en la medición de la presión ejercida por el gas sea tan pequeño como queramos, $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ para un valor prefijado $\varepsilon>0$, siempre que el error al medir la temperatura sea suficientemente pequeño, $|x-x_0|<\delta$ donde la existencia de $\delta>0$ está asegurada en virtud de tal propiedad. Si esto no se pudiera garantizar, describir la dependencia entre estas dos magnitudes mediante la función f tendría muy poca utilidad.

Quizá resulte curioso hacer notar que Cauchy utilizaba en sus escritos la letra ε, debido a la conexión entre épsilon y la palabra francesa «*erreur*» (error en castellano), haciendo uso de esta letra

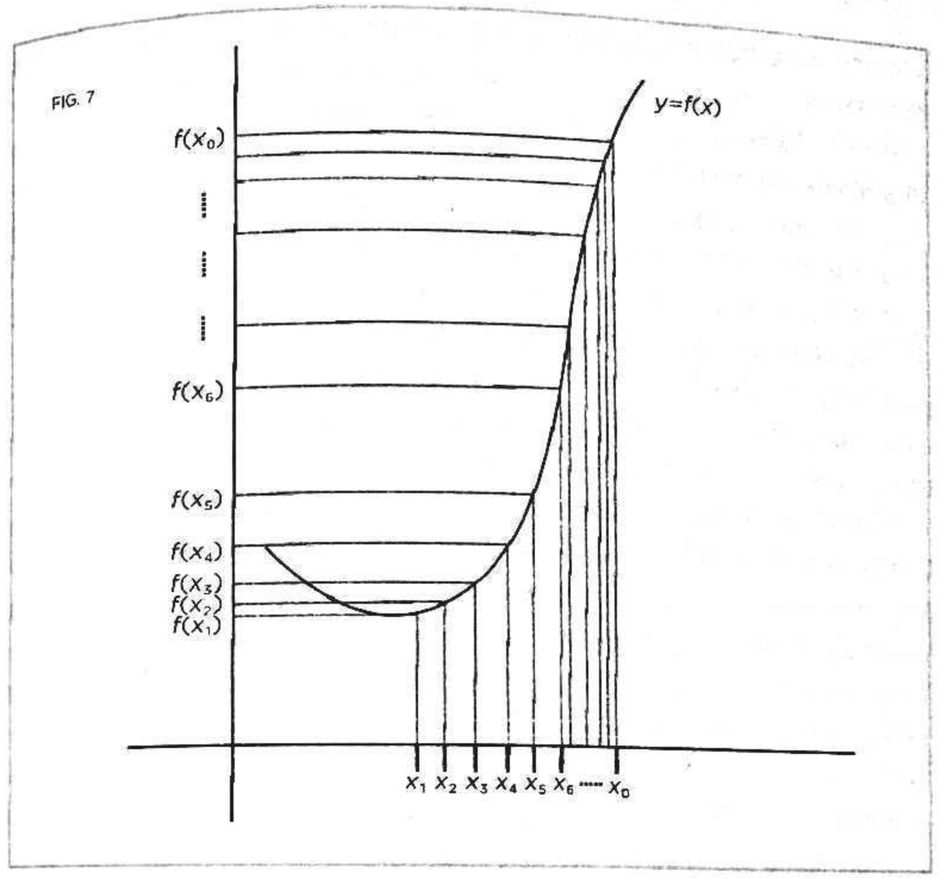
griega incluso en algunos de sus trabajos sobre probabilidad. Es decir, podríamos afirmar que esta letra era utilizada inicialmente para designar el error en las aproximaciones, pero posteriormente se ha convertido, sin lugar a dudas, en un símbolo de precisión y rigor en el cálculo.

En términos del tratamiento de convergencia realizado anteriormente para sucesiones, la continuidad de una función puede también ser tratada de forma equivalente en el siguiente sentido: si tomamos una sucesión de puntos x_n, n = 1, 2, 3..., en el dominio de la función $f(x)$, cuyo límite es x_0, entonces la secuencia de las imágenes $f(x_n), n = 1,2,3...$, converge a $f(x_0)$.

Por otra parte, ya sabemos que el comportamiento de muchos fenómenos propios de la vida cotidiana puede ser descrito a través de una función que recoja las características objeto de estudio. En este sentido, muchos problemas admiten planteamientos con distintas soluciones, en los que se busca mejorar u optimizar aspectos relativos a un coste, una producción, etc., y los máximos y mínimos de las funciones aparecen aquí como claves para encontrar la solución deseada. Por ejemplo, a una empresa le interesa el nivel de producción donde se alcanza la máxima utilidad o el máximo ingreso; o a un empresario le interesaría saber el nivel de producción al que el coste promedio por unidad es mínimo. En este contexto, en muchos casos es importante saber si existe al menos una solución del problema de optimización que tenemos entre manos, por lo que debemos dar condiciones suficientes que lo garanticen.

Una vez establecidas las definiciones rigurosas, Weierstrass demostró con argumentos puramente analíticos, es decir, sin recurrir a la intuición, que una función continua que toma valores en un intervalo cerrado y acotado alcanza un máximo y un mínimo absolutos, lo que podría considerarse como el primer resultado, el más básico y elemental, de la llamada teoría de optimización. Los matemáticos anteriores habían asumido este resultado sin disponer de una prueba concluyente. Al parecer este resultado ya se recogía en las clases de Weierstrass de 1861, bajo el nombre de «teorema principal». Sin embargo, para ello también necesitó de una construcción rigurosa de los números reales, proceso que trataremos en una próxima sección.

FIG. 7



Representación gráfica de la continuidad mediante sucesiones.

Otra de las importantes aportaciones de Weierstrass fue la de eliminar los errores que conducían a pensar que una función continua, salvo en ciertos puntos excepcionales, era derivable. Para ello se basó en una definición de derivada que presentaba un gran cambio con respecto al planteamiento clásico, lo que además le permitió generalizar fácilmente este concepto a funciones de varias variables.

SOBRE LA CONVERGENCIA Y LA CONTINUIDAD UNIFORME

Como ya se indicó anteriormente, en muchos aspectos terminó Weierstrass la tarea iniciada por otros matemáticos, como Cauchy

y Bolzano, al eliminar la mayoría de las carencias existentes en los razonamientos anteriores.

Una de estas lagunas matemáticas fue la relativa a la confusión evidenciada en torno a la continuidad del límite de una sucesión de funciones continuas. Al respecto, en la gran obra *Cours d'analyse* de 1821, Augustin Louis Cauchy afirmó erróneamente que si $\{f_n\}, n = 1,2,3\ldots$ es una sucesión de funciones continuas definidas en un conjunto A tal que para cada punto x de A la sucesión $\{f_n(x)\}, n = 1,2,3\ldots$ es convergente, entonces la función f definida como $f(x) := \lim_{x\to\infty} f_n(x)$, para cada x de A, es continua. Cabe la posibilidad de que Cauchy tuviera en mente una noción de continuidad distinta a la que de forma explícita aparecía en su definición (de hecho, hay teorías que tratan de desmenuzar las claves de este supuesto error), pero ya en 1826 Abel publicó un contraejemplo a esta afirmación, aunque sin identificar el error en la prueba brindada por Cauchy. Por ejemplo, se puede comprobar fácilmente que la sucesión de funciones continuas $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ definidas por $f_n(x) = x^n$ converge puntualmente hacia la función discontinua $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ que vale 0 si $0 \le x < 1$ y $f(1) = 1$. Incluso algunos historiadores de las matemáticas apuntan a que Bolzano, en 1816, también creyó que una serie infinita de funciones continuas era continua.

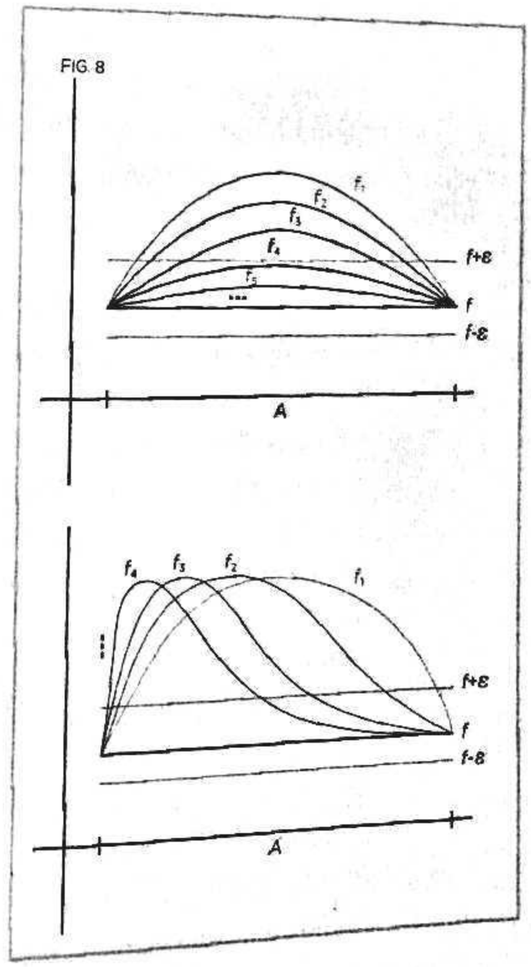
Ante la evidencia de que este resultado no era cierto, la necesidad de corregirlo condujo a Weierstrass al concepto de convergencia uniforme. Desde finales de la década de 1850 empezó a utilizar este concepto con normalidad en sus clases y, en este sentido, las notas que se conservaron de algunos de sus alumnos recogían el planteamiento de la cuestión sobre las condiciones que se deben requerir para que una serie convergente de funciones continuas represente una función continua. El profesor Weierstrass respondió afirmando que una condición suficiente era la convergencia «en igual grado», que es la forma de convergencia que hoy en día es llamada convergencia uniforme, cuya definición es la siguiente: la sucesión de funciones $\{f_n\}, n = 1,2,3\ldots$ definidas sobre un conjunto A, converge uniformemente a la función f, definida sobre A, si para cada $\varepsilon > 0$ existe un número natural n_0 tal que para cada $n > n_0$, y para cada x en A, $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Lo

importante es que n_0 solo depende de ε y no del punto x. Del mismo modo, tomando esta misma idea de la no dependencia del punto, a partir del concepto de continuidad tratado anteriormente, se puede llegar al de continuidad uniforme de una función en un conjunto o intervalo.

De esta forma, Weierstrass empleó la noción de uniformidad para demostrar en este contexto que, si una sucesión de funciones continuas converge uniformemente, la función límite es también continua. Asimismo, con miras a su utilización en el terreno de las series de potencias, Weierstrass proporcionó un importante criterio, que hoy en día lleva su nombre, consistente en afirmar que una condición suficiente para que una serie de funciones sea uniformemente convergente, sobre un conjunto dado, es que cada función interviniente f_n esté acotada (en valor absoluto) sobre tal conjunto por una constante $C_n \ge 0$ de tal forma que $\sum_{n\ge1} C_n$ sea una serie numérica convergente.

Por otra parte, Weierstrass también utilizó la noción de convergencia uniforme para otros propósitos, por ejemplo en los concernientes a la obtención de las condiciones que permitan integrar término a término una serie de funciones, propiedad que sin esa condición puede ser falsa, o en lo relativo a la diferenciación bajo el signo de integral.

En este sentido, la falacia o paradoja del ejemplo presentado en la figura 4, en la que se alcanzaba una contradicción aparente, es un claro ejemplo de sucesión convergente cuyos términos tienen ciertas propiedades que su límite no hereda. Esto muestra que, en general, no podemos guiar nuestros pensamientos tan solo a partir de la idea gráfica. En tal ejemplo, en cada etapa se



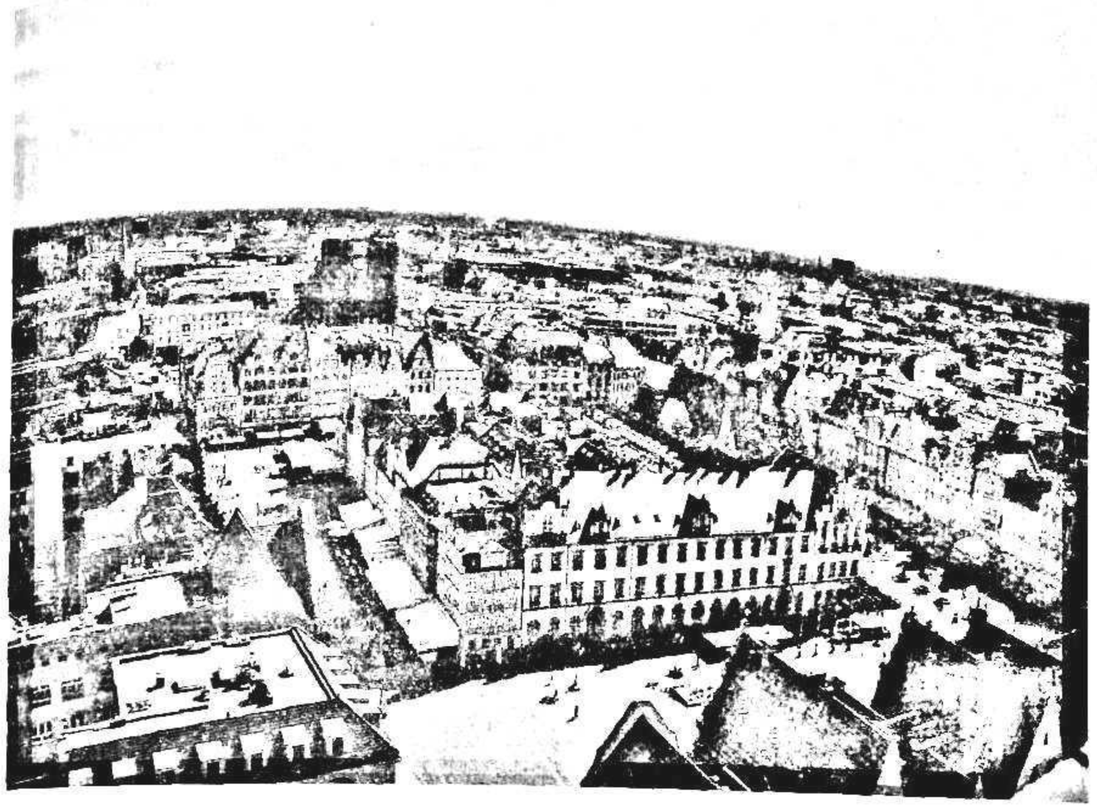
Convergencia uniforme (arriba) y convergencia puntual pero no uniforme (abajo).

introducen puntos, justamente donde se unen las semicircunferencias, en los que la tangente es vertical en su totalidad y, por tanto, la función obtenida en cada paso no es derivable en estos puntos. De esta forma, las derivadas no convergen de una manera uniforme a la derivada de la función límite, aunque las funciones sí lo hacen. Esto provoca que la longitud de la función límite en el sentido de la convergencia uniforme (el segmento *AB*) no sea igual al límite de las longitudes de las funciones de la sucesión.

EL SISTEMA DE LOS NÚMEROS REALES

La introducción del rigor en el análisis puso de manifiesto la falta de claridad y la imprecisión del sistema de los números reales. En concreto, el estudio más preciso de los límites demostró la necesidad analítica de llegar a una comprensión lógica de los números reales, cuya naturaleza debía ser clarificada para que muchos resultados quedaran establecidos sin ningún género de duda. En tal sentido se pronunció el historiador de la ciencia estadounidense Carl Benjamin Boyer (1906-1976), en su libro *Historia de la matemática*: «Weierstrass contribuyó al programa de aritmetización no solo con una definición satisfactoria de número real, sino también con una definición depurada del concepto de límite. [...] Podía decirse que la Edad del Rigor había llegado ya, verdaderamente, sustituyendo los viejos recursos heurísticos y las ideas intuitivas por la crítica precisión lógica».

Antes de abordar la solución a esta problemática, cabría retroceder en el tiempo para contemplar su evolución a lo largo de la historia de la matemática, y aun de la propia humanidad. El concepto de «número» se desarrolló muy lentamente, a lo largo de la evolución de la mente humana, tras un proceso de abstracción natural que estaba íntimamente ligado a la vida diaria en todos sus aspectos. En particular, podríamos decir que el número natural surgió por la necesidad humana de contar. La Escuela Pitagórica, fundada por Pitágoras de Samos a mediados del siglo VI a.C., se centró en el estudio de los números naturales y las relaciones exis-



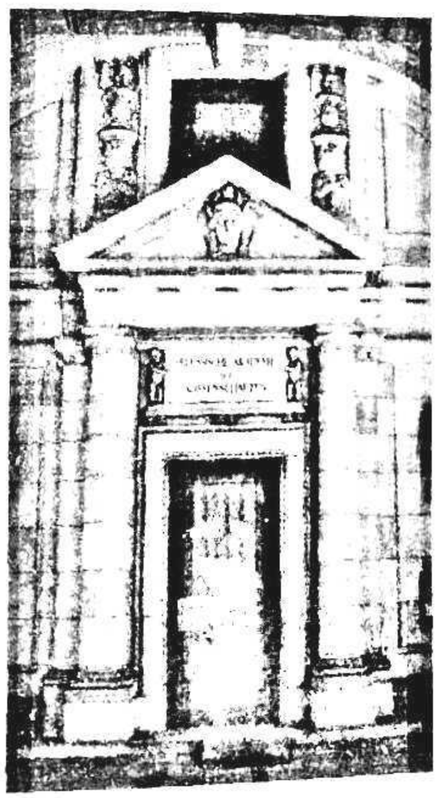


FOTO SUPERIOR:
La ciudad prusiana de Breslau, hoy integrada en Polonia, recibe actualmente el nombre de Wroclaw. Junto a estas líneas, la Plaza del Mercado.

FOTO INFERIOR IZQUIERDA:
El matemático alemán Peter Dirichlet, retratado en un grabado sobre madera del siglo XIX.

FOTO INFERIOR DERECHA:
Portada de acceso a la Academia de Ciencias de Berlín, fundada en el siglo XVIII, institución donde Weierstrass fue admitido como miembro en 1856.

tentes entre ellos, lo que dio lugar al desarrollo de una importante parte de la aritmética. De hecho, los seguidores de este movimiento filosófico o religioso llegaron a asumir que los números eran los átomos que componían el universo.

En cuanto a este proceso evolutivo, cabe añadir que, a partir de un momento dado, hubo que representar medidas reales con símbolos, y cada cultura concibió unos u otros sistemas de numeración y caracteres para expresarlos. Al final prevaleció el sistema de numeración posicional en base 10 inventado por los hindúes y transmitido a Occidente por los árabes, que, como sabemos, consiste en los dígitos del 1 al 9 y otro para el cero. Dado que nuestro intelecto y tiempo son limitados, no nos debería sorprender en absoluto la necesidad de introducir símbolos con el fin de superar en parte nuestras barreras mentales.

Las primeras ampliaciones del sistema de números naturales fueron las fracciones babilónicas y egipcias, en las que se utilizaba un sistema de notación fraccionaria que permitió establecer aproximaciones decimales verdaderamente sorprendentes. Por otra parte, en un momento dado se señaló claramente la conveniencia práctica de expresar cantidades de magnitudes que presentaban un doble sentido, es decir, la necesidad de disponer del conjunto de los números enteros, formado por los positivos (números naturales), los negativos (opuestos de los naturales) y el cero. De esta forma, aunque su formalización fue más artificiosa que la de los números racionales y en su primera fase de desarrollo fueron considerados como números ficticios, se llegó a la interpretación de que los números negativos servían, por ejemplo, para contar o medir una deuda o pérdida, y se empezó a utilizarlos libremente a partir del siglo XVII. Como se señaló en el capítulo anterior, los números complejos también tuvieron una evolución similar. Además, es conveniente remarcar que la extensión del concepto de número natural al de número racional (los números que resultan del cociente entre dos números enteros) constituyó un gran avance matemático, pues satisfacía, por una parte, la necesidad teórica de suprimir las restricciones a la sustracción y a la división y, por otra, la necesidad práctica de poder representar los resultados de muchas mediciones.

Por último, sobre una base puramente aritmética y partiendo esencialmente del dominio de los números racionales, en el curso 1865-1866 Weierstrass construyó una noción consistente de número real. *Grosso modo*, a través de una serie de observaciones similares a las realizadas por el matemático francés Charles Méray (1835-1911), podríamos decir que Weierstrass entendía los números reales como agregados de ciertos elementos. En particular asumía que, por ejemplo, al pensar asociamos el número 5 a la abstracción consistente en aquello que tienen en común todos los grupos de objetos que pueden contarse con los dedos de una mano, y así con cualquier número natural. Gracias a esta relación, si definimos las partes exactas de la unidad como las colecciones del tipo $1/n$, siendo n un número natural, Weierstrass podía definir los números racionales positivos como el conjunto de sus agregados finitos, entendidos en el sentido de colecciones finitas de partes exactas de la unidad que pueden repetirse, sobre los que se añade un criterio de igualdad que permite establecer una relación de equivalencia.

Por ejemplo, el número racional p/q, con $p>0$ y $q\neq 0$, lo podemos representar mediante la colección finita formada por

$$\left[\frac{1}{q},\frac{1}{q},\overset{p}{\ldots},\frac{1}{q}\right],$$

aunque en realidad es solamente una entre todas sus posibles representaciones.

Una vez definidos los números racionales, Weierstrass consideró los agregados infinitos numerables de partes exactas de la unidad, restringiendo cada uno de ellos de manera que el número de veces que aparece cada parte exacta de la unidad sea finito. Además, sobre ellos se añade un criterio de contenencia de un agregado finito en otro finito o infinito numerable, estableciendo posteriormente la igualdad de dos agregados, siempre que cada parte finita de uno de ellos esté contenida en el otro y viceversa. De esta forma, los números racionales se identifican con aquellas clases de equivalencia a las que pertenecen los agregados finitos, de la misma manera que los irracionales se identifican con las cantidades numéricas representadas por cualquier miembro de las restantes clases de equivalencia de los agregados considerados anteriormente.

Por ejemplo, dado que

$$e^x = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!},$$

$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots n$ es el factorial del número natural n y $0! = 1$, el número irracional e se puede representar mediante la colección numerable

$$\left[2, \frac{1}{2!}, \frac{1}{3!}, \ldots\right]$$

y no se puede encontrar ningún agregado finito que lo represente.

Weierstrass consiguió así una construcción rigurosa de los números reales que le permitió realizar enormes avances en su línea de trabajo. En cualquier caso, el proceso de fundamentación del sistema de los números reales culminó en 1872 con los planteamientos aritméticos más conocidos adoptados por el alemán Richard Dedekind (1831-1916), a partir de lo que se conoce como «cortaduras de Dedekind», y el ruso Georg Cantor (1845-1918), al desarrollar la que él mismo bautizó como aritmética de los números transfinitos.

No obstante, ya a partir de la construcción de Weierstrass se obtenía que cualquier número real daba lugar a una sucesión

LAS INVENCIONES DE CANTOR Y DEDEKIND

Georg Cantor (1845-1918), discípulo de Karl Weierstrass en la Universidad de Berlín, ideó un sistema para comparar conjuntos cualesquiera de objetos absolutamente arbitrarios. Si la cantidad de objetos es finita, para saber cuál tiene más elementos podemos simplemente contarlos, pero ¿y si los elementos son infinitos? Pues bien, en la teoría de conjuntos ideada por Cantor, se dice que dos conjuntos son equipotentes (o que se pueden coordinar) si se puede establecer entre ellos una relación de uno a uno (es decir, una aplicación biyectiva). De esta forma, por ejemplo los números pares son equipotentes a los números naturales (la aplicación $f(n) = 2n$ aplica biyectivamente los números naturales en los pares), los naturales y los enteros también son equipotentes (una aplicación biyectiva viene dada por

$$f(n) = \frac{n}{2} \text{ si } n \text{ es un número natural par,}$$

$$\text{y } f(n) = \frac{1-n}{2} \text{ si } n \text{ es un número natural impar),}$$

e incluso los racionales son equipotentes a los números naturales, lo que demostró Cantor mediante el método de diagonalización que, básicamente, consiste en montar una matriz donde se pueden construir todas las fracciones (el numerador es la fila y el denominador la columna, o al revés) y recorrer —o numerar— cada elemento siguiendo las distintas diagonales.

Dedekind y los números racionales

Por otra parte, Richard Dedekind notó que, dada una unidad arbitraria de longitud, cada número racional podía ser asociado con un único punto en la recta real, pero el recíproco era falso, es decir, había longitudes que no eran medidas por ningún múltiplo racional de la unidad de longitud, un hecho ya conocido por la escuela pitagórica. Fue entonces cuando ideó su construcción de los números reales, mediante las llamadas «cortaduras de Dedekind», en las cuales los números irracionales aparecen para rellenar los «huecos» entre números racionales, creando un conjunto completo: el continuo de los números reales. Además, Dedekind llegó a afirmar, sin probarlo, que la recta real era infinitamente más rica que el dominio de los números racionales, lo que acabó corroborando Cantor, al demostrar que el conjunto de los números irracionales no es equipotente al conjunto de los números naturales y, por lo tanto, que los números reales no pueden contarse uno a uno. Esto fue un hallazgo importante, ya que el infinito de los números reales aparecía enfrentado al infinito de los números naturales.

Richard Dedekind.

convergente de sumas parciales, lo que permitió subsanar el círculo vicioso existente anteriormente en los razonamientos en torno a este hecho. En concreto, dado que en los años anteriores a la aparición de las citadas construcciones un número irracional aparecía como el límite de una sucesión de números racionales (por ejemplo, $\sqrt{2}$ podía ser únicamente concebido como el límite de 1, 1,4, 1,41, 1,414, 1,4142...) para poder definir así este objeto matemático era necesario presuponer la existencia de tal límite que, a su vez, se definía como un número real, lo que daba lugar a un serio lapso de razonamiento. En efecto, *a priori* no podemos saber si, además de los números racionales de cuya existencia se parte, existen otros números distintos a ellos.

Además, Weierstrass supo que su enfoque le llevaría a probar una propiedad fundamental, conocida hoy en día con el nombre de teorema de Bolzano-Weierstrass: toda sucesión acotada de números reales tiene una subsucesión convergente. En otras palabras, toda sucesión acotada de números reales tiene un punto de acumulación. Este resultado, probado por Weierstrass en 1874, podríamos catalogarlo como el más importante sobre convergencia de sucesiones. Al parecer, Bolzano ya contempló la demostración de este resultado en 1817, de ahí el nombre con el que se suele conocer. Como consecuencia del hecho de que cada conjunto infinito acotado de números reales tenga un punto límite, Weierstrass pudo también dar una demostración del llamado «teorema de valor intermedio para funciones continuas», que de manera intuitiva afirma que, igual que el volumen de agua que fluye de un recipiente o el crecimiento de una planta tiene un comportamiento continuo, en el sentido de que pasa por todos los valores intermedios posibles, en el caso de que una función sea continua en un intervalo cerrado tomará todos los valores intermedios comprendidos entre los extremos alcanzados en tal intervalo.

En definitiva, el hecho de poder disponer de una construcción lógica de los números reales permitió desprenderse de anteriores planteamientos intuitivos, que en ocasiones presentaban graves lapsos de razonamiento, y demostrar los teoremas fundamentales sobre límites con todo rigor, sin hacer uso de la intuición geométrica. En esta línea, otra contribución esencial de Weierstrass al análisis matemático es el teorema de aproximación que lleva su nombre y sobre el que hablaremos en el último capítulo.

CAPÍTULO 3

El proceso de aritmetización del análisis

En una etapa histórica de revisión en profundidad del llamado cálculo infinitesimal, Weierstrass elaboró una presentación rigurosa de su teoría y construyó de manera cuidadosa su edificio matemático, independientemente de toda referencia a la intuición geométrica. Sin lugar a dudas, la obra de Weierstrass elevó el nivel de autocrítica matemática, tanto en las definiciones como en el rigor de las demostraciones.

El proceso de aritmetización llevado a cabo a lo largo del siglo XIX consistió en la búsqueda por aprender y asimilar una nueva realidad matemática, en la que la validez lógica se estableció como esencial.

El siglo XIII supuso el comienzo de un renacimiento intelectual en Occidente. La aceptación de la cultura griega y del pensamiento aristotélico por parte de la Iglesia católica influyó considerablemente en este proceso de cambio. De esta forma, a partir del siglo XIV, se produjo una verdadera demanda de métodos más precisos para la búsqueda de nuevos materiales, el desarrollo de la tecnología, la determinación de la posición en el mar de forma precisa —debido a las exploraciones geográficas que atravesaban grandes distancias en mar abierto—, la mejora de los mecanismos de cálculo —propiciada por el desarrollo del comercio— o la resolución de problemas con tintes militares motivados por la introducción de la pólvora —como el movimiento y trayectoria de proyectiles—. Simultáneamente, el descubrimiento de otras civilizaciones tuvo consecuencias aperturistas en la cultura europea y la imprenta favoreció que el conocimiento comenzara a diseminarse ampliamente. Estos motivos influyeron enormemente para que, en la civilización europea moderna, se priorizara la búsqueda del conocimiento y el desarrollo científico con el fin de explicar los fenómenos de la naturaleza. Desde el punto de vista matemático,

el objetivo principal en esta época fue el de producir métodos y resultados nuevos.

En el siglo XIII, la aparición de una escritura simbólica adecuada fue muy importante, pues hizo mucho más fácil el desarrollo de nuevas técnicas formales de cálculo y de métodos infinitesimales. Sin embargo, muchos trabajos matemáticos ordinarios anteriores al siglo XVIII solo contenían los pasos para la introducción de algún elemento nuevo o de una idea original, con lo que el rigor de las demostraciones no fue la marca distintiva de este período.

«El rigor es asunto de los filósofos, más que de los matemáticos.»

— BONAVENTURA CAVALIERI.

Asimismo, en el siglo XVII, el aparato matemático que intervenía en el desarrollo y las aplicaciones del cálculo diferencial e integral se enmarcaba dentro de un contexto ampliamente geométrico y, por tanto, la intuición jugaba un papel muy importante en gran parte de la investigación matemática de la época. En síntesis, los intereses matemáticos de aquel tiempo se centraron en exponer predicciones con altas dosis de certeza, respaldadas por la comprobación del resultado en una serie de casos particulares y sustentadas en ejemplos numéricos que proporcionaban fiabilidad al enunciado.

EN BUSCA DEL RIGOR

Aunque llegó un momento en el que se creó la necesidad de demostrar formalmente todos los resultados que se iban incorporando, la idea de demostración formal y rigurosa siguió cambiando de sentido a través de las épocas, en función del contexto y el entorno cultural, lo que originó inquietudes y polémicas entre los matemáticos de la época. De esta manera, la búsqueda de la consistencia de las construcciones matemáticas se convirtió en una necesidad para poder admitir los nuevos resultados que iban apareciendo. En definitiva, esta sensación de falta de consistencia y rigor resultó en una fuente constante de paradojas y contradicciones, ocasionando múltiples controversias y una gran sensación de inseguridad.

Con la llegada del siglo XIX se inició un proceso de cambio que desembocaría en la revisión en profundidad del llamado cálculo infinitesimal, y en el inicio de un proceso exhaustivo de rigorización que condujo al correcto tratamiento de los elementos básicos en el desarrollo de las matemáticas. Varios matemáticos ilustres, entre los que destacó Karl Weierstrass, contribuyeron enormemente a la cuidada elaboración de estas unidades básicas que permitieron el apuntalamiento de la ciencia matemática y que han llevado, en la actualidad, a la consideración de las matemáticas como una forma de pensamiento axiomático, en la que pueden deducirse conclusiones válidas a partir de determinados sistemas de premisas, y a la producción de cantidades ingentes de artículos científicos que son debidamente establecidos.

LAS PRUEBAS MATEMÁTICAS

Antes del siglo XIX se realizaron casos de demostraciones que eran catalogadas como poco meticulosas; además, las que se proponían para sustituirlas eran consideradas insuficientes por la generación siguiente de científicos. Muchos matemáticos se centraban exclusivamente en tratar de obtener nuevos resultados y aplicaciones sin preocuparse en demasía por el rigor de su trabajo, así que la presencia de este tipo de inseguridades matemáticas causaba naturalmente una sensación negativa entre los investigadores más puristas.

La propia noción de rigor fue cambiando durante el proceso de rigorización, que continuó a lo largo de todo el siglo XIX. De hecho, el consenso sobre lo que era un paso trivial dentro de una prueba matemática se iba estableciendo en función del contexto histórico y cultural.

Sin embargo, la sensación de inseguridad que estaba presente en esta época se fue disipando a medida que avanzaba el proceso de rigorización, y que las distintas construcciones y deducciones clave se iban sucediendo.

Pero ¿qué se entiende por prueba o demostración matemática? En términos heurísticos, podríamos decir que una prueba es un recurso retórico para convencer a alguien de que una afirmación matemática es cierta. De forma más específica, partiendo de unas definiciones y un cuerpo axiomático bien definidos, una demostración matemática es una serie de pasos razonados, donde cada una de tales etapas deriva de manera lógica de las anteriores, encaminadas a la afirmación que se quiere probar. En palabras del matemático y filósofo de la ciencia húngaro Imre Lakatos (1922-1974): «Una demostración es una sucesión finita de fórmulas de algún sistema dado, donde cada uno de los pasos de la sucesión es o bien un axioma del sistema, o bien una fórmula derivada por una regla del sistema a partir de una fórmula precedente».

CUESTIÓN DE AXIOMAS Y MÉTODOS DE COMPROBACIÓN

En este proceso, partir de definiciones y axiomas convenientes resulta esencial. Las definiciones proporcionan el lenguaje y la terminología con la que formular los axiomas y los resultados que posteriormente se establezcan. Un axioma o postulado es una afirmación que no requiere prueba y que se toma como plausible u obvia. Siguiendo el principio conocido como «navaja de Occam» (en honor al teólogo y filósofo inglés Guillermo de Occam, 1285-1347), se busca tener el menor número posible de axiomas. El sentido del precepto es que, a igualdad de condiciones, las teorías más simples son las preferidas. Además, partiendo de estos elementos básicos, en matemáticas se confirma el hecho de que una afirmación o proposición es verdadera o falsa, pero no ambas cosas a la vez.

Esta concepción de las pruebas matemáticas, concebidas como deducciones a partir de postulados o axiomas establecidos con anterioridad, fue proyectada por los matemáticos de la antigua Grecia. El reconocimiento explícito de que las matemáticas tratan con abstracciones y de que el razonamiento deductivo se puede utilizar como base en el desarrollo de esta disciplina, resultó tremendamente importante en su evolución posterior.

«El rigor matemático lo encuentro parecido a la vestimenta: en su estilo debería adaptarse a la ocasión, y disminuye la comodidad y restringe la libertad de movimiento en cuanto es demasiado desajustado o demasiado ceñido.»

— GEORGE F. SIMMONS, *DIFFERENTIAL EQUATIONS*, 1972.

En la consecución de cada uno de los pasos que componen una demostración matemática se pueden utilizar diferentes métodos o mecanismos lógicos. Entre los más comunes encontramos el llamado «método directo», que consiste en asumir que se cumple una propiedad A (hipótesis) y comprobar directamente que se verifica otra propiedad B (tesis o conclusión). Por ejemplo, si n es un número par, entonces por el método directo se puede demostrar que n^2 también es par.

En el conocido «método de reducción al absurdo», muy utilizado por los matemáticos griegos de la Antigüedad, para probar que una propiedad A es cierta se supone que A es falsa y se llega a una contradicción. Un ejemplo muy conocido de demostración por reducción al absurdo muestra la naturaleza irracional de $\sqrt{p}$, donde p es un número primo.

Otro método de demostración es el «principio de inducción matemática», que se utiliza para demostrar la veracidad de una colección numerable de propiedades $P(1), P(2), \ldots, P(n), \ldots$ Se comprueba de forma independiente que la primera propiedad $P(1)$ se verifica y a continuación se demuestra que cualquier caso $P(n)$ implica el siguiente $P(n+1)$. Por ejemplo, podemos demostrar por inducción que la relación

$$1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

es válida para cualquier número natural . Evidentemente, el hecho de que una afirmación sea cierta en algunos casos especiales no implica su veracidad en todos los casos. Por ejemplo, podríamos pensar que la fórmula $P(n)=n^2+n+41$, $n=0, 1, 2\ldots$ genera siempre números primos, ya que $P(0)=41$, $P(1)=43$, $P(2)=47$, $P(3)=53$, $P(4)=61$, $P(5)=71$, pero esto falla, por ejemplo, con

$P(40) = 1\,681 = 41 \cdot 41$. En ocasiones se tiende a generalizar o a inducir que una propiedad dependiente de n pueda ser cierta para cualquier caso o, al menos, a partir de un determinado valor; sin embargo, hasta que no se demuestre por el principio de inducción matemática no es posible asegurarlo.

Por otra parte, si se quiere demostrar que una propiedad A implica otra propiedad B, el método del «contrarrecíproco» consiste en demostrar que la negación de B implica la negación de A. Por ejemplo, el lector puede utilizar esta técnica para demostrar que si a y b son números reales verificando $a \cdot b = 0$, entonces se tiene que $a = 0$ o $b = 0$. También, cuando se hace referencia a la «doble implicación o equivalencia» estamos ante la aspiración de demostrar que una propiedad A implica otra propiedad B, y que además el recíproco es cierto, es decir, que también B implica A. Por ejemplo, siendo a y b números reales, se cumple que $a^2 + b^2 = 0$ si, y solo si, $a = 0$ y $b = 0$.

Posiblemente el lector también haya escuchado hablar de la «demostración por exhaustividad» (o «por casos»), en la que la conclusión se establece al dividirla en un número finito de casos y probarlos cada uno por separado. Por ejemplo, siendo n un número entero, se puede demostrar por casos, suponiendo que n es par o impar, que $n^2 + n + 1$ es impar.

Además, se recurre al uso de *contraejemplos* cuando se plantea la posibilidad de que la propiedad objeto de estudio sea falsa. Así, mediante el uso de un ejemplo en el que no se cumpla la propiedad en cuestión, se prueba la falsedad de la afirmación previamente realizada. Por ejemplo, siendo p un número primo, no es cierto siempre que $2^p - 1$ sea primo, ya que

$$2^{11} - 1 = 2\,047 = 23 \cdot 89.$$

En este sentido, como mostraremos más tarde, un contraejemplo muy significativo fue la difusión por parte de Weierstrass de una función continua en todos los números reales que no era derivable en ningún punto. Relacionado con ello, la «demostración por construcción» es la elaboración de un ejemplo provisto de una propiedad específica, con tal de mostrar la existencia de objetos matemáticos que presenten tal cualidad.

Así pues, una demostración se considera completa o rigurosa si cada una de las inferencias de las que se compone es correcta. Para ello es fundamental partir de unas definiciones básicas y de un cuerpo axiomático bien construidos, ya que, aunque se tenga una idea muy certera, sin ellos no se pueden conseguir demostraciones correctas en un lenguaje propiamente matemático. Además, en general se busca que las definiciones elegidas y los teoremas probados sean lo suficientemente generales o amplios como para abarcar la mayor parte posible de la estructura principal encuadrada en la temática en cuestión.

En este aspecto, el uso de la notación simbólica ha contribuido enormemente a la consecución asequible de la gran mayoría de las pruebas matemáticas que se manejan en la actualidad. La incorporación de nueva simbología matemática, de invalorable apoyo pedagógico, ayudó por ejemplo a explorar y hacer más asequible el entendimiento de las pruebas contenidas en los trabajos de los matemáticos griegos de la Antigüedad.

ERRORES COMUNES Y VERIFICACIÓN

La deducción de un nuevo resultado a partir tan solo de la manipulación de símbolos no conforma en absoluto una prueba del mismo. De igual manera, tampoco se pueden probar nuevas afirmaciones —por ejemplo, sobre funciones o curvas continuas— con la única ayuda de un gráfico. Desde el punto de vista didáctico, un gráfico o un esquema puede servir para ilustrar razonamientos o guiar la intuición, pero no pueden conformar una prueba matemática, aunque de modo instintivo pensemos que se trate de algo trivial. A este respecto, el lector debe de saber que la intuición, al igual que las emociones, no están presentes en el lenguaje matemático utilizado en una demostración formal.

Dejando de lado el error de cálculo trivial, las incorrecciones en las pruebas matemáticas se pueden producir asumiendo como verosímil alguna propiedad que no es un axioma o no está demostrada, o al confundir propiedades o proposiciones que pudieran parecer análogas (con enunciados complicados o con un gran nú-

mero de casos). En efecto, podríamos encontrar en la literatura matemática algunos casos de pruebas fallidas en las que los analistas olvidaron comprobar, paso por paso, si estaban aplicando algo más que sus propias definiciones. Esto ocurrió, por ejemplo, con los errores de principios del siglo XIX en torno a la continuidad y la convergencia, y también por lo que respecta a las nociones intuitivas que se tenían de ellas. En cualquier caso, si los objetos matemáticos no están definidos de manera precisa, las supuestas demostraciones realizadas ya están perjudicadas desde el principio y, en este sentido, cabría decir más de una vez que la falta de rigor significa falta de precisión.

Cabe decir también que este tipo de errores es menos frecuente cuando el matemático se sirve de una teoría ya consolidada, lo que sucedería con el análisis matemático gracias a la aportación realizada por Weierstrass.

«Presentar un argumento cuidadosamente razonado de varios cientos de páginas con precisión absoluta parece que vaya más allá de la capacidad humana... ¿Cómo se puede garantizar que el "colador" no ha dejado escurrir una configuración que conduzca a otro grupo simple? Por desgracia, no hay garantías, debemos vivir con esta realidad.»

— DANIEL GORENSTEIN, SOBRE EL TEOREMA DE CLASIFICACIÓN DE LOS GRUPOS FINITOS SIMPLES.

Desde el último tercio del siglo XX y ya en la era de la computación, una problemática vigente concierne a las dificultades de verificación que algunas pruebas plantean (por ejemplo, en relación a su extensión), lo que ha llevado, cada vez más, a recurrir al uso de ordenadores. Una prueba popular que se atribuye al ordenador es la resolución en 1976 de la llamada «conjetura de los cuatro colores». Desde que este resultado se conjeturó, se sucedieron varios intentos erróneos de demostración hasta que, utilizando conceptos de teoría de grafos, finalmente se logró reducir el problema a algo menos de 1 500 configuraciones posibles, tarea que terminó de verificar un ordenador. El problema estribaba en el número de los cálculos: eran tantos que ningún humano podría reproducirlos en un tiempo razonable. Años más tarde se propusieron otras pruebas, pero también utilizando la informática como herramienta imprescindible.

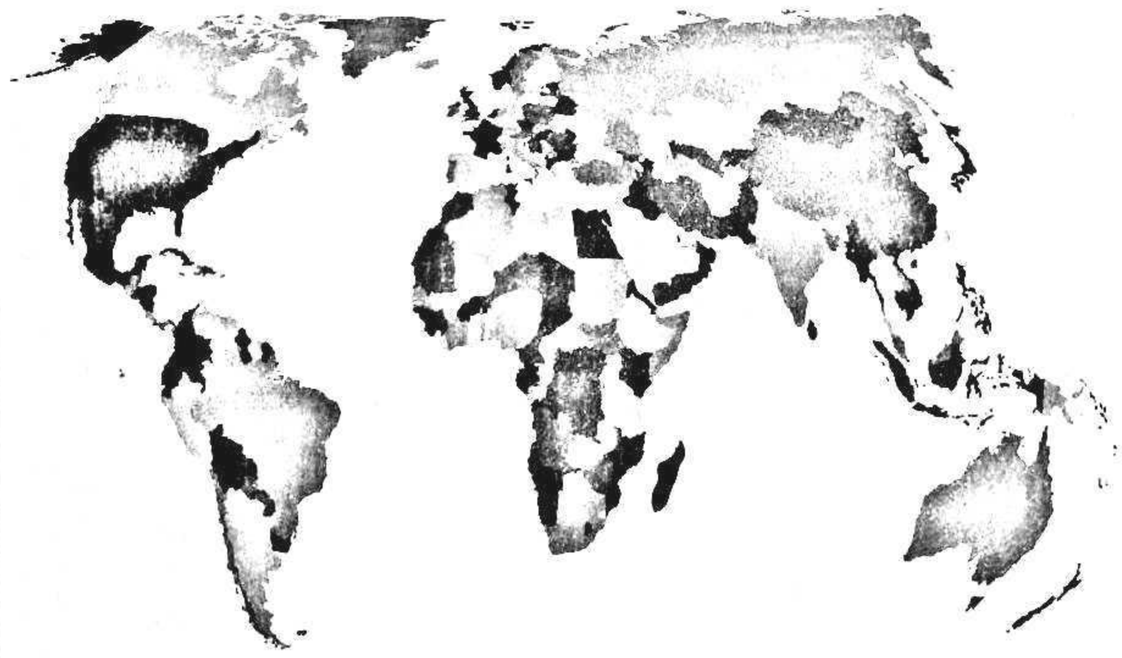
También en la década de 1980 y en relación al álgebra abstracta, se dio por completada la prueba del llamado «teorema de clasificación de los grupos finitos simples», que conllevaba unas once mil páginas de razonamiento matemático desglosado en varios cientos de trabajos de distintos autores. El principal organizador de todo este proyecto, el matemático estadounidense Daniel Gorenstein (1923-1992), siempre tuvo el temor de que tan importante resultado no fuera adecuadamente asimilado por la comunidad científica, y, en tal sentido, con posterioridad se han ido realizando mejoras e intentos para facilitar su comprensión y aceptar sin reparos la prueba como válida.

EL CÁLCULO INFINITESIMAL

El proceso de cambio del siglo XIX, afianzado por los trabajos de Weierstrass, supuso una revisión en profundidad del llamado «cálculo infinitesimal». Esta herramienta matemática, encuadrada en el área del análisis matemático, resulta ser de extraordinaria utilidad en el planteamiento y resolución de problemas que admiten modelos cuyos objetos de estudio sean divisibles en pequeñas partes simples (o diferenciales), que sumadas —o integradas— vuelvan a dar el total. Así pues, el cálculo infinitesimal recoge dos ramas complementarias, los denominados «cálculo diferencial» y «cálculo integral», que se ocupan, respectivamente, de la diferenciación, y de la suma o integración. Por tanto, el cálculo infinitesimal, también llamado por simplificación «cálculo», permite analizar de forma precisa funciones con dominios continuos. Los problemas típicos que dieron origen a esta herramienta comenzaron a plantearse a finales de la época clásica de la antigua Grecia (siglo III a.C.), pero no se encontraron métodos sistemáticos de resolución hasta el siglo XVII, gracias a las con-

CONJETURANDO CON COLORES

La conjetura de los cuatro colores fue planteada en 1852 por el abogado y botánico sudafricano Francis Guthrie (1831-1899), aunque su enunciado no fue publicado hasta 1878, por el matemático británico Arthur Cayley (1821-1895). Esta conjetura establecía que cualquier mapa geográfico plano con regiones continuas o conexas puede ser coloreado con cuatro colores diferentes, de forma que no queden países adyacentes, con frontera común, que tengan el mismo color. Hay que tener en cuenta además que dos regiones no pueden tocarse en un único punto. Se trataba claramente de un problema topológico, en el que no importaba la forma de las regiones sino como están colocadas las unas con respecto a las otras. Inicialmente, por lo elemental de su planteamiento se pensaba que la prueba tenía que ser muy corta. Sin embargo, pasó más de un siglo hasta su resolución, en 1976. Se trata del primer gran teorema probado con un ordenador, lo que levantó muchas controversias en el momento de su publicación. Entre otros aspectos, se argumentaba que la infalibilidad del *hardware* no había quedado demostrada, y se cuestionaba si podía aceptarse como válida una afirmación que solo una máquina, y no una mente humana, podía comprobar.



Mapa del mundo coloreado con cuatro tonos.

tribuciones del científico británico Isaac Newton (1642-1727) y del matemático y filósofo alemán Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716).

UTILIDADES DEL CÁLCULO INFINITESIMAL

El cálculo infinitesimal incluye el estudio de límites, derivadas, integrales y series infinitas. Innumerables problemas matemáticos, también relacionados de modo particular con la geometría o la física, pueden ser tratados con este enfoque y, asimismo, con su ayuda muchos científicos, ingenieros o economistas pueden modelar multitud de situaciones de la vida real. Más aún, podemos afirmar que, a diario, todas las personas manejan conceptos vinculados al cálculo infinitesimal. Por ejemplo, cuando nos fijamos en la evolución del precio de un determinado producto que solemos comprar, de manera inconsciente estamos manejando una función con máximos y mínimos, y valoramos la tasa de crecimiento o disminución, que aparece vinculada al concepto de derivada. Lo mismo ocurre, por ejemplo, cuando los médicos observan la evolución de la temperatura de un paciente o la tasa de variación de la concentración de azúcar en sangre al aumentar la dosis de insulina.

Cabe identificar la idea de derivada con la noción de «velocidad instantánea». En efecto, sabemos que la velocidad media expresa la relación entre la variación del espacio y la variación del tiempo, pero si calculamos la velocidad media en intervalos de tiempo cada vez más breves (alrededor de un instante en concreto), y calculamos el límite cuando el intervalo de tiempo tiende a cero, obtenemos la velocidad instantánea, que es el valor teórico que marcaría en ese momento el velocímetro de un coche que estuviera recorriendo algún tramo específico de una carretera rectilínea. Al respecto, cuando un coche circula por ejemplo a una velocidad de 100 km por hora, técnicamente esto significa que, empleando la formalización dada por Weierstrass y analizada en el capítulo anterior, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|t_2 - t_1| < \delta$ entonces

$$\left|\frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} - 100\right| < \varepsilon,$$

siendo $s_2 - s_1$ la variación del espacio en el intervalo $t_2 - t_1$.

Así, en términos generales, la derivada de una función es un concepto local que mide la rapidez con la que cambia el valor de dicha función según cambie el valor de su variable independiente, y se calcula como el límite de la rapidez de cambio media en un cierto intervalo y alrededor del punto en cuestión, que se torna cada vez más pequeño.

Newton y Leibniz, de manera independiente y casi simultánea, manejaron inicialmente el cálculo diferencial como método para determinar la recta tangente a una curva en un punto dado. Intuitivamente, se trata de la recta que, en las inmediaciones del punto en cuestión, solo corta a la curva en dicho punto, de manera que cualquier pequeño cambio de su pendiente la convierte en una recta secante, con algún otro punto de intersección próximo. Así, en términos geométricos, la derivada indica la pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función en el punto en cuestión. Conviene comentar que, por ejemplo, las leyes del movimiento de Newton de la física, las ecuaciones del físico y matemático británico James Clerk Maxwell (1831-1879) en su teoría de electromagnetismo o la teoría de la relatividad general de su homólogo alemán Albert Einstein (1879-1955) están también expresados en el lenguaje del cálculo diferencial.

EL CÁLCULO INTEGRAL Y SUS USOS

Por otra parte, los problemas de determinación de longitudes de curvas, áreas encerradas por curvas o volúmenes y superficies de determinadas regiones en el espacio, forman parte del llamado cálculo integral, en el que se utilizan técnicas infinitesimales o procedimientos que requieren el paso al límite. Ya los matemáticos del siglo XVII, como por ejemplo el italiano Bonaventura Cavalieri (1598-1647), se imaginaban un área de una región plana como formada por un número infinito de segmentos paralelos, llamados «indivisibles», cada uno de ellos interpretado como un rectángulo infinitamente estrecho. De igual forma, un volumen se consideraba compuesto por un número infinito de áreas planas paralelas, llamadas también indivisibles. En términos generales, y en relación con ello, la idea central que tenemos en la actualidad sobre la integral es que esta puede verse como un procedimiento de paso al límite de la suma, es decir, si una función es integrable en un intervalo dado, la integral de dicha función puede obtenerse como el límite de una cierta sucesión de sumas. Isaac Barrow (1630-1677) fue uno de los primeros en observar el carácter inverso entre los problemas de las tangentes y los de cuadraturas o cálculo de áreas acotadas por curvas, hecho que finalmente se confirmó con el llamado «teorema fundamental del cálculo», al identificar como inversos los conceptos que hoy en día llamamos derivada e integral.

A través de conceptos como el de «trabajo», «fuerza», «potencia», «centros de gravedad» o «momentos de inercia», el cálculo integral encuentra numerosas aplicaciones en el campo de la física. Además, esta rama de las matemáticas resulta fundamental en distintas áreas, por ejemplo para el cálculo de las trayectorias de las sondas espaciales. Y, desde luego, también es de suma importancia en la vida profesional de un ingeniero o arquitecto, pues, por ejemplo, todo puente colgante y edificio a prueba de terremotos debe en parte su diseño al cálculo infinitesimal. Asimismo, también interviene en la determinación de los ritmos de las reacciones y el decaimiento radiactivo en la química; la comprensión y digitalización de imágenes, sonidos y vídeos en la informática; o el cálculo de áreas y volúmenes de líquido en la hidráulica.

SOBRE LA NOCIÓN DE FUNCIÓN

En los siglos XVIII y XIX, en los que el análisis matemático se instaló definitivamente en el panorama científico, las funciones eran consideradas como los objetos por excelencia de las matemáticas. Fue precisamente en la clarificación de este término, clave para

esta disciplina, como surgió la tendencia a la denominada «aritmetización del análisis», expresión acuñada en 1895 por el matemático alemán Felix Klein (1849-1925).

Naturalmente, la concepción de función está presente de un modo u otro en el lenguaje de nuestra vida cotidiana, pues corresponde de forma intuitiva a una idea. Por ejemplo, el consumo de gasolina en un viaje depende sobre todo de los kilómetros que recorramos. Otro caso: los impuestos que pagamos vienen dados en buena medida en función de nuestros ingresos. La noción de función ha ido evolucionando con el transcurso de la historia bajo tres perspectivas: la geométrica, en términos de curvas; la algebraica, expresada como una fórmula, y, finalmente, la idea de función como correspondencia.

En el contexto del cálculo, la definición de función real de variable real que se suele considerar actualmente es la siguiente: se dice que f es una función definida en un conjunto D de números reales si a cada punto x de D se le asocia un único número real que denotamos por $f(x)$.

LOS PADRES DEL CÁLCULO INFINITESIMAL

Isaac Newton y Gottfried Wilhelm Leibniz trabajaron en paralelo en la invención del cálculo infinitesimal. Leibniz fue el primero en publicar un trabajo sobre ello, en 1684, pero Newton ya se había ocupado del asunto entre 1664 y 1666 (el británico no solía publicar sus trabajos inmediatamente y solo compartió sus manuscritos iniciales sobre las derivadas con sus compañeros del Trinity College de Cambridge). Newton saltó a la cumbre de la fama en 1687, cuando publicó su libro *Principia Mathematica*, donde explicaba las leyes que rigen el universo; en sus páginas dedujo matemáticamente desde los flujos de las mareas hasta las órbitas de los planetas. Tras ello presidió la Royal Society, integrada por los más prestigiosos científicos británicos, llegó a ser diputado e incluso director de la Real Casa de la Moneda.

Issac Newton.

Las bases de una polémica

En un principio, ambos trabajaron de forma independiente en lo que Newton denominó «teoría de fluxiones», constituida por un conjunto de reglas con las que también podían calcularse máximos, mínimos y tangentes, sin que las cantidades fraccionarias o irracionales supusieran ningún obstáculo. La notación del sabio británico para la diferenciación —consistía en un punto sobre el nombre de la función, que denominaba «fluxión»— ha sido muy utilizada en física y, en concreto, para representar la derivada respecto del tiempo. Sin embargo, Leibniz fue desarrollando su notación hasta encontrar una que le permitiera trabajar más intuitivamente y, de hecho, las notaciones que utilizaba para simbolizar diferenciales e integrales se siguen utilizando en la actualidad. En particular, la operación de diferenciación fue representada mediante el operador d/dx, lo que permite recordar intuitivamente varios conceptos del cálculo como la regla de la cadena. Además, Leibniz introdujo el símbolo de la integral $\int$ como un alargamiento de una S que representa una suma. Tras la publicación de Leibniz, muchos matemáticos ingleses lo acusaron de plagio, ya que sabían del trabajo de su compatriota y lo único que admitían era el cambio de notación, como el propio Newton remarcó en su obra. Entre los miembros de la comunidad matemática se podían encontrar adeptos de ambos autores, pero ciertamente hubo una trifulca entre Inglaterra y Alemania; en el fondo se luchaba por quedarse con la autoría de la invención del cálculo infinitesimal.

Gottfried Leibniz.

En general, lo que se pretende al establecer una dependencia funcional es determinar la forma en que una cierta magnitud se relaciona con otra. Si nos remontamos a la Antigüedad, conviene decir que los matemáticos babilónicos, de forma intuitiva, ya manejaban la noción de función, hecho que se aprecia en los estudios de astronomía de la época, cuando recurrían a tablas de datos, interpolaciones y extrapolaciones en búsqueda de regularidades y proporciones. También los matemáticos griegos manejaron implícitamente esta noción, a través de las proporciones que permitían comparar variables de la misma naturaleza, o incluso siendo conocedores, por ejemplo, del área de un círculo a partir de la medición de su radio. Sin embargo, este concepto no se desarrolló entonces de forma explícita, debido a la ausencia de prerrequisitos algebraicos, la falta de desarrollo de la notación simbólica o la ausencia de necesidad de abstraer esta noción.

Más tarde, en el siglo XVII, el filósofo y matemático francés René Descartes (1596-1650) y su compatriota y también matemático Pierre de Fermat (1601-1665) establecieron conexiones entre la geometría y el álgebra, dando los primeros pasos hacia la llamada «geometría analítica», en la que se explicita la relación de dependencia entre dos cantidades variables, y la noción de función se asocia a una curva que representa la trayectoria de puntos en movimiento. Al parecer fue Leibniz, en 1673, quien primero utilizó el término «función» en este sentido, referido a un objeto algebraico asociado con una curva, aunque conviene matizar que no la utilizaba para designar la relación formal entre la ordenada de un punto de una curva y su abscisa en el sentido moderno.

Por tanto, este cambio de mentalidad se tradujo en asociar a las curvas una ecuación algebraica, de manera que fueron priorizándose los aspectos, llamados «analíticos», relacionados con estas expresiones algebraicas de las curvas, frente a los aspectos puramente geométricos. En estos comienzos, las funciones se manejaban en forma implícita y prácticamente se reducían a funciones cuadráticas o cúbicas, esto es, un polinomio en dos variables de grado 2 o 3 igualado a cero.

En la segunda mitad del siglo XVII empezaron a usarse con más asiduidad expresiones explícitas para las funciones, gracias a los matemáticos que estaban empezando a desarrollar el cálculo infinitesimal: así los británicos John Wallis (1616-1703) e Isaac Barrow (1630-1677), junto con los ya citados Newton y Leibniz. A la vez, el número de funciones que los matemáticos consideraban interesantes de estudiar se fue ampliando. De hecho, los logaritmos inventados a principio de esa centuria, las exponenciales y las razones trigonométricas empezaron a tratarse desde el punto de vista funcional, al descubrirse que estas funciones daban respuesta a determinados problemas de tangentes y cuadraturas.

Tras la concepción de función dada por Leibniz, el suizo Johann Bernouilli (1667-1748) publicó más tarde, en 1718, una definición de función de una variable como una cantidad compuesta por una variable y constantes en forma de sumas o productos. No obstante, fue otro suizo, Leonhard Euler (1707-1783), quien colocó la idea de función como objeto principal de estudio, y tomó como función de una magnitud variable cualquier expresión analítica formada con la cantidad variable y con números o cantidades constantes. Con el tiempo, «expresión analítica» adquiriría el significado de que la función debía admitir un desarrollo en serie de potencias (con exponentes en las potencias no necesariamente de enteros positivos). El énfasis dado por Euler al concepto de función como pieza central del análisis resultó clave en la constitución del análisis matemático como una rama principal de las matemáticas actuales, y su definición de función permaneció predominante a lo largo de la mayor parte del siglo XVIII.

LAS FUNCIONES EN LA MATEMÁTICA CONTEMPORÁNEA

Fue un curioso problema asociado al estudio del movimiento el que desencadenó un debate mucho más acalorado del concepto de función. En efecto, el interesante comportamiento de una cuerda al vibrar, cuando está sujeta por sus extremos, dio lugar a una de las controversias más apasionadas y fructíferas en la historia de las ma-

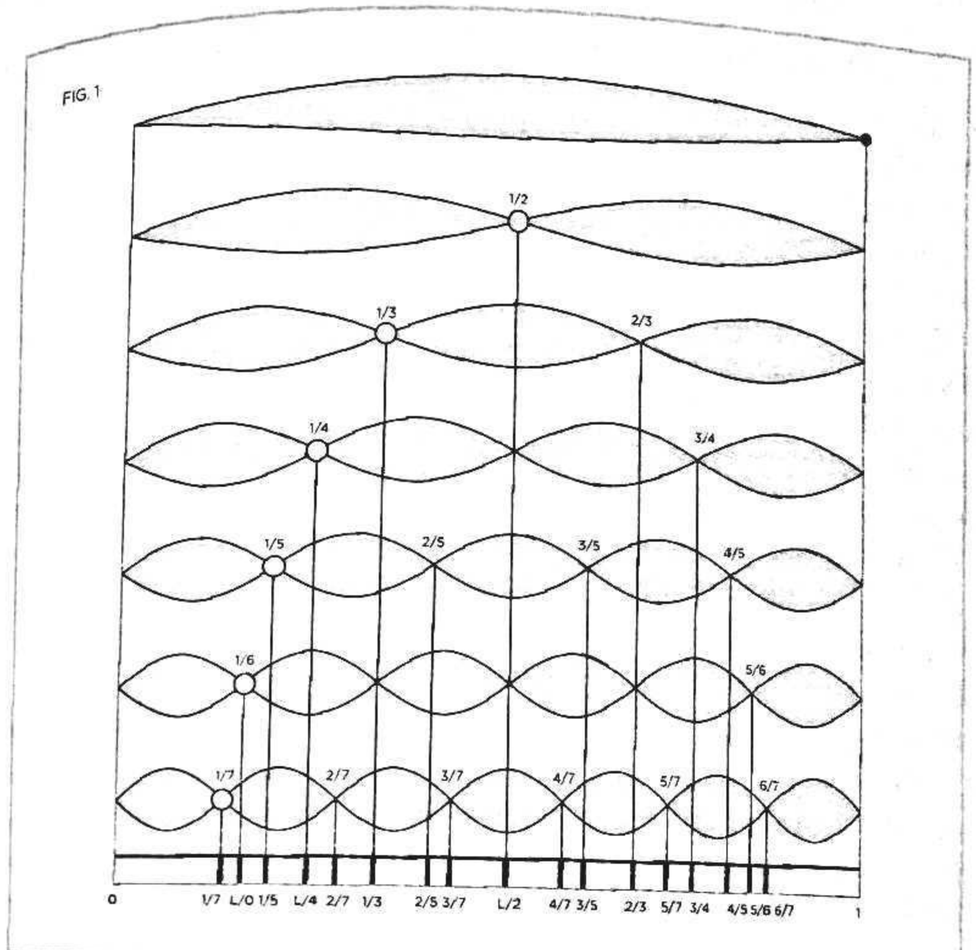
temáticas, e hizo ver que hacía falta ampliar el concepto de función para dar cabida a muchas que habían quedado fuera con la definición que se manejaba anteriormente.

Hasta el siglo XVIII, las matemáticas no disponían del suficiente desarrollo para poder enfrentarse al problema de encontrar una función que modele la forma o posición de la cuerda en un instante, que llevaba implícita la tarea de establecer una correspondencia biunívoca entre las funciones y las curvas. En 1715 ya se afirmó que la forma de la curva tomada por la cuerda en un instante dado debía ser sinusoidal. Posteriormente, varios matemáticos aportaron sus diferentes y enfrentadas tentativas de solución precisa al problema, hasta que en 1824 intervino el francés Joseph Fourier (1768-1830), quien afirmó que cualquier función $y=f(x)$ lleva asociada una serie trigonométrica, llamada posteriormente serie de Fourier, de la forma:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(nx)+b_n\operatorname{sen}(nx)\right).$$

Es decir, Fourier afirmó resolver el problema de desarrollar una función cualquiera en una serie infinita de senos y cosenos de arcos múltiples, esto es, para una abscisa x el valor de la ordenada $f(x)$ vendría dado en términos de una serie en la que aparecen el seno y el coseno de $x, 2x, 3x, \ldots, nx, \ldots$ Así pues, las series trigonométricas también desempeñaron un papel importante en la evolución del rigor.

Efectivamente, el aparato de las series trigonométricas dio la posibilidad a Fourier de expresar con su ayuda funciones de naturaleza muy general. No pudo eliminar algunas imprecisiones, pero prácticamente podía desarrollar en serie cualquiera de las funciones que en aquel entonces se le podía proponer. Con ello, los puristas se fueron dando cuenta, de una manera gradual, de que sus intuiciones de función arbitraria necesitaban aclararse. Mediante este método, Fourier también logró resolver los problemas de conducción del calor para muchos casos particulares. De hecho, el trabajo de 1824 correspondía a una parte de la memoria, no publicada anteriormente, con la que el matemático francés consiguió el premio del Instituto de Francia correspondiente al año 1812,



Modos de vibración de una cuerda tensa sujeta por los extremos.

otorgado al mejor trabajo en relación a la teoría matemática de las leyes de propagación del calor.

Además de pequeñas imprecisiones, cabe consignar también algunos serios imprevistos adicionales que fueron apareciendo poco a poco a lo largo de la historia. Por ejemplo, al contrario de lo que Fourier asumía como obvio sin dar una prueba explícita, sus series engendradas por una función dada, sin imponer condiciones sobre ella, podían no ser convergentes en todo el intervalo para el que se obtienen (e incluso en ningún punto de tal intervalo). En relación a ello, bastante más tarde, en 1873, Paul du Bois-Reymond (1831-1889) demostró con un ejemplo que una función continua no había de ser por necesidad representable mediante su serie de Fourier, ya que la serie asociada a su ejemplo de función continua era divergente en un punto. Además, en 1872, Weierstrass ya había demostrado que

no eran necesarias de forma conjunta la continuidad y la derivabilidad. Incluso en 1926, el matemático soviético Andréi Kolmogorov (1903-1987) también demostró que existían funciones integrables cuyas series de Fourier divergen en todo punto.

Si bien poco a poco se fue admitiendo la naturaleza arbitraria de una función, estos objetos matemáticos se consideraban de manera explícita o implícita como producto de expresiones analíticas, o de expresiones que se podían representar gráficamente como curvas. En cualquier caso, en comparación con las series de potencias, las representaciones de funciones por medio de la serie de Fourier permitían un grado mucho mayor de generalidad. Incluso en el caso en el que la función tenga muchos puntos, pero en un número finito, en los que no existe la derivada o en los que la función no sea continua, esta puede tener igualmente un desarrollo en serie de Fourier. Por tanto, las funciones ya no necesitaban tener tan buen comportamiento en su forma como las que los matemáticos habían manejado hasta entonces. Por ejemplo, para Euler, las funciones discontinuas en general no se podían expresar analíticamente y, por consiguiente, la definición manejada con anterioridad era demasiado restrictiva para dar solución al problema de la cuerda vibrante, que requería de una mayor generalidad. Sin embargo, las funciones que manejaba Fourier tendrían singularidades —discontinuidades o puntos donde no existiera la derivada— a lo más en un número finito de puntos, y esto de nuevo imponía ciertas condiciones de regularidad sobre la función que a veces no se cumplían.

Hubo varios intentos de extender el concepto de función, hasta que el ya citado Dirichlet propuso en 1837 una definición bastante amplia y general, que se acercaba mucho a la idea moderna de una correspondencia general entre dos conjuntos de números reales. En efecto, este matemático alemán aportó una definición de función de una variable real como una tabla, o correspondencia, entre dos conjuntos de números reales, que ya apuntaba hacia una teoría de equivalencia de conjuntos de puntos o, más concretamente, hacia una noción de equipotencia de conjuntos que, a su vez, nos conduce al tratamiento del cardinal de cualquier conjunto, finito o infinito. El propio Dirichlet comprendió por ejemplo que, a fin de definir la integral de una función, no era necesario que esta fuese continua ni

que tuviese a lo sumo un número finito de discontinuidades. De manera independiente, el ruso Nikolái Lobachevski (1792-1856) también aportó una definición de función en términos muy semejantes a los empleados por Dirichlet.

De modo progresivo, la tendencia a una mayor abstracción se vio reforzada a medida que se encontraron ejemplos de funciones sin expresión analítica o representación geométrica sencilla, o sin relación con ningún fenómeno natural. Además, el descubrimiento y la difusión por parte de Weierstrass de un ejemplo patológico (las funciones continuas no tienen necesariamente derivada), el estudio de la variedad y extensión de las discontinuidades de las funciones o también el hecho de que las funciones discontinuas podían integrarse, hicieron que los matemáticos se percataran de que el estudio de funciones se extendía más allá de las que se usaban en cálculo, donde el requerimiento de la derivabilidad restringía generalmente la clase de funciones.

No obstante, las funciones peculiares que se iban introduciendo en el panorama matemático fueron catalogadas en ocasiones como funciones disparatadas o divertidas, es decir, como juguetes matemáticos sin grandes consecuencias, y tratadas simplemente como curiosidades. Algunos investigadores consideraban pedantes las nuevas hipótesis para enunciar un teorema preciso y, de hecho, afirmaban que los detalles novedosos ensombrecían las ideas principales. Como en cualquier progreso significativo, la presencia de autores disconformes con la tendencia que empezó a dominar el panorama matemático no brilló por su ausencia.

Felix Klein afirmó que únicamente se dispondría de una noción correcta de función cuando esta herramienta se liberase de la intuición y fuera definida en términos puramente aritméticos.

DESENCADENANTES Y PROMOTORES DEL PROCESO DE RIGORIZACIÓN

Muchos de los matemáticos del siglo XVIII y de principios del siglo XIX no brillaron por su pericia teórica, ya que más bien actuaban

con el afán de conseguir más y más resultados. Una fórmula que apareciera a modo de intuición, o apresuradamente deducida con un débil razonamiento, era tan buena como otra con tal de que proporcionara resultados prácticos y resolviese alguno de los problemas planteados.

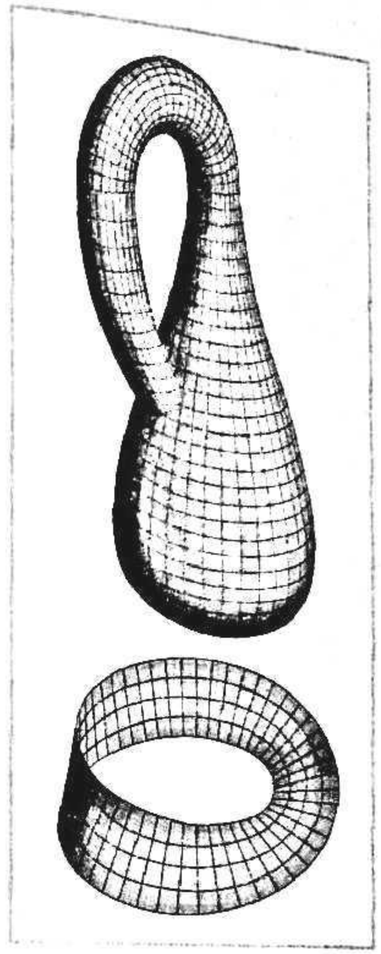
Antes del arranque del siglo XIX, varios fueron los factores que desencadenaron el cambio de tendencia posteriormente registrado. Correspondió al filósofo irlandés George Berkeley (1685-1753), en 1734, dar razones de cierto peso con tal de restablecer los fundamentos de las matemáticas. Quizá se tratase de la primera obra realmente crítica e influyente en esta vertiente. El título y subtítulo, bastante explicativos, era este: *El analista: discurso dirigido a un matemático infiel, en el que se examina si el objeto, principios e inferencias del análisis moderno están claramente concebidos o son deducidos con mayor evidencia que los misterios de la religión y los asuntos de la fe*. En ella, Berkeley criticaba algunos de los argumentos utilizados por los matemáticos de su tiempo y afirmaba que estos no tenían derecho a atacar la supuesta irracionalidad de la religión, debido a la forma con la que ellos mismos razonaban.

Aunque ciertas definiciones y objetos matemáticos procedentes del desarrollo del cálculo de Newton y Leibniz pudieran parecer intuitivamente agradables, no podían ser correctamente utilizadas ni aplicadas en términos algebraicos. Sin embargo, durante el siglo XVIII, las manipulaciones con infinitos o infinitesimales eran admisibles, las operaciones finitas o infinitas se trataban de la misma forma (en particular, se empleaban series infinitas como si se tratasen de polinomios), y las cantidades arbitrarias, ya fueran reales o imaginarias, podían ser sustituidas en una identidad formal, lo que causaba discrepancias e inquietudes, a pesar de que con ello se conseguían nuevos e importantes resultados.

Asimismo, algunos matemáticos, como los franceses Jean le Rond d'Alembert (1717-1783) o Silvestre Lacroix (1765-1843), afirmaron que la teoría de los límites era la verdadera metafísica del cálculo diferencial, es decir, vieron claramente que el cálculo no necesitaba más fórmulas, sino un cimiento. Esto es, algunos matemáticos apoyaban la idea de que se habían descuidado los fun-

LA APORTACIÓN DE FELIX KLEIN

Tras la aparición de nuevas geometrías, como las no euclídeas, el matemático alemán Felix Klein presentó en 1872 un programa de investigación llamado «Programa de Erlangen», con motivo de su ingreso como profesor de la universidad de esa ciudad alemana. En dicho trabajo aportó una definición formal de lo que era una geometría, más allá de las ideas intuitivas que se tenían al respecto, y propuso una nueva solución al problema de cómo clasificar y caracterizar las diversas geometrías existentes, incluidas las que habían aparecido recientemente, sobre la base de la geometría proyectiva y la teoría de grupos. Su nombre se asocia también a la botella de Klein, que describió en 1882, un ejemplo de superficie compacta, conexa y no orientable, que vendría a ser una botella sin interior ni exterior y con una sola cara; es decir, se podría recorrer en su totalidad de forma continua, sin salto alguno. Otra superficie con las características anteriores, y tal vez más conocida, es la banda de Möbius, cuyo nombre procede del matemático alemán August Ferdinand Möbius (1790-1868). De hecho, ambas superficies están relacionadas, ya que, por ejemplo, si seccionáramos la botella de Klein en dos partes a lo largo de su plano de simetría nos daría lugar a dos bandas de Möbius. Felix Klein no solo realizó importantes aportaciones en el campo de la geometría, sino que también se ocupó de la teoría de funciones y se interesó enormemente por el campo de la física matemática. Sin embargo, quizá sea su faceta más desconocida su interés por la enseñanza de las matemáticas en los niveles elementales. En efecto, Klein trabajó activamente en modernizar la enseñanza de las matemáticas en Alemania, se preocupó por la conexión entre la enseñanza en la universidad y en los niveles educativos anteriores, y una de sus aportaciones más importantes fue la recomendación de la introducción en la enseñanza secundaria de los rudimentos del cálculo diferencial e integral.



Botella de Klein y banda de Möbius.

damentos en favor de los resultados, prefiriendo la meta al camino. En este mismo sentido, pero en el contexto de las ecuaciones diferenciales, dado que la mayoría de ecuaciones surgían de problemas físicos, no había necesidad de considerar el problema de la existencia de soluciones. Sin embargo, aunque la realidad física garantizaba la existencia de soluciones, algunos matemáticos de la época sí que se plantearon la necesidad de analizar este asunto desde un punto de vista formal.

Por otra parte, la clarificación del concepto de función, catalogada como la más importante herramienta en el desarrollo del análisis matemático, fue uno de los asuntos que hubo de ser revisado, debido a la emersión paulatina de una gran cantidad y variedad de funciones en la actividad de los matemáticos de la época. Cabe señalar que, como muchas funciones surgían de modelos físicos, aquellas presentaban un buen comportamiento, lo que influyó en que no se cometiesen gran cantidad de contradicciones serias en los desarrollos y técnicas erróneas que por entonces se utilizaban.

Además, el éxito y la gran capacidad de Leonhard Euler y de otros matemáticos para resolver problemas —tanto matemáticos como físicos— utilizando el cálculo infinitesimal, acentuó la falta de un desarrollo adecuado y justificado de las ideas básicas del cálculo que tantas aplicaciones y resultados podían originar. Además de que se introdujesen y aplicasen algunas herramientas matemáticas (por ejemplo, la transformada de Laplace, el cálculo de variaciones o la función gamma), se resolvieron una gran cantidad de problemas, entre los que podemos destacar el relativo a las ecuaciones del movimiento del sistema solar o el de la ecuación diferencial parcial para las vibraciones de una cuerda. En esta época hubo un interés creciente en las matemáticas y en las ciencias en general. De esta manera, a partir de la década de 1780 y de manera paulatina, algunos comentarios aislados sobre la naturaleza del cálculo empezaron a aparecer en las introducciones de algunos cursos impartidos por influyentes matemáticos, y, posteriormente, en los libros escritos a partir de tales exposiciones.

Desde esta perspectiva, en la citada década de 1780, la Academia de Berlín, bajo la dirección del matemático francés Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), planteó que los fundamentos del cálculo se tratasen como un problema premiado. Nadie resolvió el problema propuesto, con el agrado de Lagrange, que pensaba que un enfoque enteramente algebraico sería el adecuado. En 1784, la Academia anunció la convocatoria del premio en el siguiente sentido:

> «Es bien sabido que la geometría superior emplea regularmente lo infinitamente grande y lo infinitamente pequeño... La Academia, en consecuencia, desea una explicación de cómo es posible que se hayan conseguido deducir tantos teoremas correctos a partir de unos presupuestos contradictorios, así como [...] un principio verdaderamente matemático que pueda sustituir correctamente al del infinito».

LA IMPRONTA DE CAUCHY

Bajo este panorama, en los inicios del siglo XIX, antes de que el cálculo alcanzara su depurada finura con los épsilons y deltas numéricos de Weierstrass, entre las mentes más perspicaces promotoras del proceso de rigorización debemos destacar nuevamente la figura de Augustin Louis Cauchy. A diferencia de Weierstrass, la productividad científica de Cauchy fue excepcional y, de hecho, los biógrafos calculan alrededor de ochocientos trabajos publicados sobre distintos temas. En las dos primeras décadas del siglo XIX, el francés tomó como elementos organizadores de su programa los conceptos de función, límite y continuidad. En particular contribuyó a eliminar de la idea de función toda referencia a una expresión formal, algebraica o no, para fundarla sobre la noción de correspondencia, es decir, una regla que asigna a cada elemento de un primer conjunto un único elemento de un segundo conjunto.

Se suele estar de acuerdo en que tan solo en los siglos XIX y XX, y empezando con Cauchy, se dispuso de ideas razonablemente sólidas sobre límites, continuidad, diferenciación e integración. Sin embargo, a Newton se debe el primer intento por desarrollar

la teoría de límites como base lógica del cálculo diferencial e integral. De hecho, el propio Newton introdujo el término específico de límite, no dándole una definición formal. Fue Cauchy quien consiguió precisar de forma muy meritoria las nociones de límite y continuidad, aunque posteriormente Weierstrass completaría de forma magistral esta tarea.

Desde el libro de Berkeley hasta la publicación en 1821 del *Cours d'analyse* de Cauchy, solo transcurrieron unos ochenta años, y pasaron otros escasos cincuenta hasta las aportaciones definitivas de Weierstrass. Así, con Cauchy se empezó a caracterizar la continuidad en términos más rigurosos que los intuitivos que se manejaban hasta entonces, tales como curvas que no se rompen o funciones que no tienen saltos o huecos. Se definió el cociente diferencial o derivada como límite de un cociente de diferencias, y la integral definida como límite de una suma. Además, la continuidad de una función y la convergencia de una serie infinita se reducían también al concepto de límite y, además, se introdujo el rigor en el tratamiento de las series fijando criterios de convergencia y eliminando el trato dado anteriormente a las series divergentes.

Escribió Cauchy en el prefacio de su *Cours d'analyse*:

> He tratado de dar a los métodos todo el rigor que se exige en geometría, sin acudir jamás a los argumentos tomados de la generalidad del álgebra. Tales argumentos, aunque bastante admitidos, sobre todo al pasar de las series convergentes a las divergentes, de las cantidades reales a las imaginarias, se me ocurre que no deben ser considerados sino como inducciones, adecuadas a veces para hacer presentir la exactitud y la verdad, pero que no están de acuerdo con la exactitud tan alabada de las ciencias matemáticas. Además, debe señalarse que ellas tienden a atribuir a las fórmulas algebraicas una extensión ilimitada, en tanto que, en la realidad, la mayor parte de estas fórmulas solo subsisten bajo ciertas condiciones y para determinados valores de las cantidades que encierran. Determinando esas condiciones y esos valores, fijando de una manera precisa el sentido de las notaciones que utilizo, toda vaguedad desaparece.

De forma prácticamente paralela, otro importante matemático, Bernard Bolzano, también se mostró claramente consciente de la necesidad del rigor en análisis a través de un trabajo publicado en 1817. Fue uno de los primeros en reconocer que muchas afirmaciones catalogadas como obvias sobre funciones continuas y convergencia de series requerían demostración. Sin embargo, aunque en numerosas cuestiones se adelantó a los analistas rigurosos del siglo XIX, la influencia de las ideas de Bolzano fue escasa, al encontrarse alejado de los principales centros científicos de la época.

CRISIS DE FIABILIDAD

Por otra parte, tras el análisis realizado por Joseph Fourier en relación a las funciones y a sus desarrollos en serie, hubo un período largo en el que predominó una cierta inquietud, motivada por dos causas principales.

La primera de ellas, ya comentada anteriormente, era la falta de confianza en las operaciones efectuadas con series infinitas, ya que no estaba claro ni siquiera que una serie de funciones obtenida a partir de otra función (como la serie de Taylor o la serie de Fourier) convergía siempre a la función de la que se había obtenido. La segunda causa, analizada en capítulos anteriores, era la falta de una definición precisa del concepto de número real, que constituye el núcleo fundamental de cualquier programa de aritmetización.

En efecto, la aritmetización plena y correcta del análisis solo fue posible cuando los matemáticos entendieron que había que considerar los números reales como estructuras intelectuales, y no como las magnitudes dadas intuitivamente, heredadas de la geometría de Euclides. Así pues, este proceso pasó también por ciertas crisis, que se vieron por ejemplo evidenciadas a través de algunos resultados erróneos en relación a la continuidad o la integración término a término de una serie convergente de funciones continuas.

Este tipo de situaciones se repitió de forma habitual a lo largo del siglo XIX, provocando un proceso de búsqueda de una

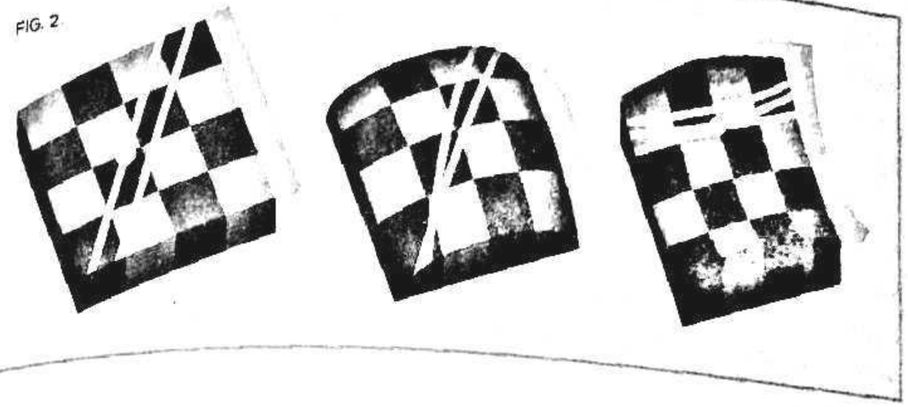
fundamentación rigurosa y formal de la matemática y, más concretamente, del análisis matemático y de su cálculo. La sensación de inseguridad en los resultados, unida a la aparición de nuevas teorías, generó la necesidad de establecer aquellas propiedades de los objetos a estudiar de una forma clara y precisa. Se optó entonces por una vuelta al método axiomático, usado por los griegos en el desarrollo de la geometría euclídea. De hecho, se produjo un cambio sustancial desde una concepción marcadamente geométrica a un tratamiento de carácter más algebraico-analítico.

«Siempre he estado muy insatisfecho con las frases, si no es que con los razonamientos de analistas incluso muy eminentes sobre muy diversos temas [...]. Un algebrista que de tal manera eliminase los obstáculos metafísicos que se encuentran a la entrada del análisis, sin sacrificar esos métodos concisos y poderosos que constituyen su esencia y su valor, realizaría una tarea útil y merece el agradecimiento de la ciencia.»

— WILLIAM ROWAN HAMILTON.

Un ejemplo significativo en este sentido fue la aparición, a principios del siglo XIX, de las geometrías no euclídeas, que surgieron a partir del intento de probar la independencia del quinto postulado de Euclides frente a los otros cuatro. Ya no había contradicción alguna en suponer que por un punto exterior a una recta podían pasar más de una paralela a la recta, o incluso ninguna (figura 2). Naturalmente, la intuición inicial al respecto se rompía con ellas. En este mismo sentido se sitúa la aparición de los cuaternios, creados en 1843 por el matemático y astrónomo irlandés William Rowan Hamilton (1805-1865), como intento de extender los números complejos a un número mayor de dimensiones, y que posteriormente abrirían el paso al estudio y el desarrollo de nuevas álgebras. El desarrollo de todas estas teorías mantenía un rasgo común con las geometrías no euclídeas, concretamente su contribución a eliminar de la matemática conceptos intuitivos

FIG. 2



Rectas paralelas en la geometría euclídea, elíptica e hiperbólica.

y hábitos mentales aún arraigados incluso en mentalidades matemáticas.

Tras Cauchy, el análisis infinitesimal fue adquiriendo paulatinamente bases sólidas. Se efectuó también una relimitación del campo de validez de muchas fórmulas y se procedió a la eliminación de toda extensión ilegítima. Así pues, el análisis se empezó a encontrar en terreno firme, con progresos rápidos como, por ejemplo, en la integral de Riemann o la continuidad y convergencia uniformes tratadas por Weierstrass, y a continuación en los trabajos sobre teoría de la medida e integración.

En este contexto, Leonhard Euler, que muchas veces aparece citado en la literatura como un ejemplo paradigmático de matemático intuitivo, dio una definición de las funciones trigonométricas como series de potencias que se formuló completamente desconectada de la geometría. Por cierto, fruto de esta actitud se llegó a la aceptación de los números complejos como instrumento de gran potencia en el análisis intrínseco de la teoría de funciones. Otro matemático que destacó al adherirse a este cambio fue Joseph-Louis Lagrange que, en una influyente obra de 1797, había usado las series de potencias como funciones, definiendo además la derivada en un punto simplemente como el coeficiente de la primera potencia en el desarrollo concreto en serie de la función en ese punto. Además, el propio Lagrange rechazó los límites y los infinitésimos de sus predecesores como faltos de solidez.

Al respecto, Gauss fue el primer gran matemático que de forma exitosa se rebeló contra el uso exclusivo de la intuición en el

análisis. Su obra *Disquisitiones Arithmeticae* está considerada como uno de los primeros tratados que representan el modelo de rigor matemático. Escrita por completo siguiendo el estilo de teorema–demostración–corolario, no desvela en ningún punto las causas que motivaron a Gauss a seguir determinadas líneas de desarrollo de las demostraciones. Así, se trata de ir exponiendo un cuerpo teórico en el que, en primer lugar, se van deduciendo mediante pasos lógicos una serie de resultados menores (lemas o proposiciones), que vienen a ser piezas de un puzle, pues unidas convenientemente dan lugar a resultados de mayor envergadura y calado (los teoremas) y a consecuencias de ellos (corolarios).

Finalmente, es importante señalar otro factor que aumentó el interés por los fundamentos del cálculo: la creciente necesidad de impartir docencia. Se empezó a ser aún más consciente de la utilidad de las matemáticas para los estudiantes de ciencias e ingeniería, a quienes proporcionó un mayor cuestionamiento sobre la naturaleza de los conceptos más importantes, y posteriormente un mayor rigor de las construcciones. Por ejemplo, los fundamentos de Weierstrass provienen de sus clases en Berlín.

EL CONTRAEJEMPLO DE WEIERSTRASS

Con el proceso de rigorización se inició una transformación del cuestionamiento de todas aquellas estructuras que tradicionalmente habían sido consideradas como válidas y bien establecidas. Nada escapó a un análisis riguroso, a una formulación precisa o a una justificación exigente, y, de hecho, podríamos decir que fue a lo largo de esta fase cuando la matemática se hizo realmente sinónimo de prueba. Incluso se profundizó en la necesidad de probar la existencia de las entidades matemáticas usadas, que dejaron de ser vistas como verdades incuestionables por su carácter heurístico y su soporte geométrico inicial. De esta manera, teniendo en cuenta la invalidación de muchos resultados incorporados de manera indebida, se fue eliminando cualquier rastro de subjetividad que aún existiera en las demostraciones.

En todo este proceso, el descubrimiento de ejemplos patológicos resultó ser clave. Los contraejemplos, que prueban la falsedad de un enunciado, juegan un papel muy importante en la comprensión de los resultados matemáticos. En general, un teorema necesita de varias hipótesis y para tratar de ver que cada una de ellas es importante se debe tratar de demostrar, mediante el uso de contraejemplos, que el enunciado obtenido suprimiendo alguna de las hipótesis es falso. Dar contraejemplos a ideas preconcebidas ayuda a rectificar la intuición inicial. Por ejemplo, no es cierto que la suma de dos números compuestos siempre sea un número compuesto, ya que $4+9=13$ y 13 es un número primo. En este sentido, otro ejemplo más elaborado se produjo, como ya comentamos anteriormente, cuando Abel propuso en 1826 un contraejemplo al supuesto resultado de Cauchy sobre que la suma de una serie convergente de funciones continuas definía una función continua.

En 1829, Dirichlet introdujo la función real de variable real que lleva su nombre, y que asigna el valor 1 a los números racionales y el valor 0 a los irracionales. Esta función vino a demostrar que no todas las funciones son continuas en algún punto. De manera intuitiva, si interpretamos una función continua como aquella que tiene una sola pieza, como se hacía antes del inicio del proceso de rigorización, no sería posible dibujar esta función en ningún tramo sin levantar la tiza de la pizarra o, alternativamente, no es cierto que pequeños incrementos en algún punto del dominio de la variable dependiente produzcan pequeños incrementos en el valor de dicha variable. Al mismo tiempo, la función de Dirichlet echaba por tierra la concepción que se tenía de función, ya fuera de forma explícita o implícita, como producto de expresiones analíticas o de expresiones que se podían representar gráficamente como curvas y, por tanto, continuas, derivables y de dominio de los números reales.

Por otra parte, de acuerdo con la noción de derivada presentada, la derivabilidad de una función en un punto implica la continuidad en ese punto. Sin embargo, el recíproco es falso, pues, en general, podemos encontrarnos con la presencia de puntos angulosos que impiden que la función tenga derivada en ese punto,

hecho que se corrobora en el punto $x = 0$ con la función valor absoluto, que asigna el propio valor a los números reales no negativos y su opuesto a los negativos. En general, la presencia de discontinuidades, puntos angulosos o tangentes verticales impide que la función sea derivable en tales puntos. De hecho, dado un conjunto finito de puntos, siguiendo la idea de la función valor absoluto, no resulta difícil imaginar cómo construir una función o curva con puntos angulosos en tales puntos.

Sin embargo, no era extraño entre los matemáticos de la época el hecho de imaginar que una función continua en algún intervalo de la recta real debía ser derivable (excepto, a lo sumo, en una cantidad finita de puntos de tal intervalo). Desde luego, la perspectiva visual o geométrica apoyaba este pensamiento, pues resulta harto difícil imaginarse la gráfica de una función que no cumpla dicha propiedad, es decir, con un punto anguloso o pico en cada uno de los puntos de la gráfica. De forma equivalente, aún en el terreno intuitivo, se pensaba que un arco continuo de curva tenía una tangente en cada punto del arco. Además, las funciones continuas que consideraban Euler o Cauchy eran, en la práctica, derivables, excepto —posiblemente— en algunos puntos aislados. Aún más, sus contemporáneos creían que este resultado había sido ya demostrado. Por ejemplo, el físico y matemático francés André-Marie Ampère (1775-1836) publicó en 1806, a partir de evidencias intuitivas, lo que consideraba una prueba de esta afirmación.

WEIERSTRASS ENTRA EN ACCIÓN

Fue el 18 de julio de 1872, en la Academia de Berlín, cuando Weierstrass proporcionó oficialmente un contraejemplo a esta propiedad, construyendo la ecuación de una curva continua a partir de una sucesión de funciones coseno, que no tenía tangente en ninguno de sus puntos. Al parecer, a finales de 1861 ya había anunciado en su seminario la existencia de tales funciones, pero esperó algunos años hasta hacer el anuncio oficial.

Fue debido a la insistencia de uno de sus anteriores alumnos, Paul du Bois-Reymond, por lo que Weierstrass permitió que se

publicara en 1875 este desconcertante invento; además, quiso también mencionar a Riemann, quien aparentemente había usado una construcción similar, aunque no publicada. Sin embargo, con el tiempo se comprobó que la función que propuso Riemann no perdía por completo la derivabilidad y, por tanto, no satisfacía la propiedad en cuestión de no tener derivada en ningún punto. De hecho, dado que Weierstrass no podía demostrar que la función de Riemann no fuera derivable en ningún punto, buscó su propio ejemplo, que finalmente consiguió.

> «Hasta hace muy poco se creía que una función continua siempre tenía una primera derivada cuyo valor podía ser infinito o indefinido solo en algunos puntos aislados. Aun en el trabajo de Gauss, Cauchy, Dirichlet, matemáticos acostumbrados a la crítica severa, no puede hallarse, de acuerdo a lo que sé, una opinión distinta.»
>
> — KARL WEIERSTRASS, 1872.

En la actualidad sabemos también que el primer ejemplo de función continua pero no derivable en una gran cantidad de puntos lo ideó Bolzano hacia 1834, pero su ejemplo no llegó a difundirse entre los miembros de la comunidad matemática y, de hecho, no llegó a publicarse hasta casi un siglo después. Al parecer, Bolzano dejó probado en sus escritos que el conjunto de puntos donde su función propuesta no es derivable, satisface la propiedad de ser denso en el intervalo donde la función está definida, es decir, entre dos puntos del intervalo se puede encontrar otro donde la función no es derivable. También es cierto que su función, dada como el límite de una sucesión de funciones continuas, estuvo basada en una construcción geométrica.

Además, el francés Charles Cellérier (1818-1889) propuso hacia 1860 otra función similar, que no fue publicada hasta 1890, por lo que, al haberse ya publicado la de Weierstrass, únicamente resultó ser una curiosidad. Después de la lectura de Weierstrass, pero antes de su publicación, Gaston Darboux (1842-1917) también aportó otro

ejemplo, en términos de la función seno, citando en el prefacio a Riemann, Hankel, Schwarz y Klein, pero omitiendo el nombre de Weierstrass. Con el objetivo de encontrar más funciones extrañas, el matemático italiano Ulisse Dini (1845-1918) sí que citó a Weierstrass en la publicación, poco tiempo después de que este mostrara su función, de otro ejemplo que verificaba la misma propiedad.

El ejemplo proporcionado por Weierstrass, el primero publicado con tales características, demostró que el concepto de continuidad es realmente más amplio que el de derivabilidad o diferenciabilidad, y estableció la continuidad como un concepto importante de trabajo, independientemente de la derivabilidad. Por tanto, la existencia de una función como la de Weierstrass contribuyó enormemente a evidenciar la limitación del razonamiento geométrico intuitivo en el análisis y la necesidad de hacer formulaciones analíticas cuidadosas de los conceptos básicos.

La función de Weierstrass en cuestión estaba definida por

$$W(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a^n\cos\left(b^n\pi x\right),x\in\mathbb{R},$$

con $0<a<1$ y $b>1$ un entero impar tal que $ab>1+3\pi/2$. En 1873 Paul du Bois-Reymond, que trabajaba como profesor de la Universidad de Heidelberg, envió su manuscrito sobre la función de Weierstrass, entre otros temas, al *Journal für die reine und angewandte Mathematik*. Inicialmente, en este documento de 1873, du Bois-Reymond presentó la función en forma distinta, concretamente como

$$f(x)=\sum\nolimits_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\left(a^nx\right)}{b^n},\frac{a}{b}>1,$$

pero aparentemente fue cambiada antes de que el artículo, en su versión definitiva, se publicara en 1875.

En 1916, otro matemático, el británico Godfrey Harold Hardy (1877-1947), probó la misma propiedad para la función de Weierstrass con las condiciones $0<a<1$, $ab\geq 1$, $b>1$ (es decir, b no necesariamente un entero impar). Posteriormente aparecieron varias generalizaciones a la función de Weierstrass y, como hemos visto, nuevos ejemplos de funciones continuas pero no derivables en ningún punto. A partir de entonces, el ejemplo aportado por Weierstrass empezó a aparecer en varios libros de texto importantes.

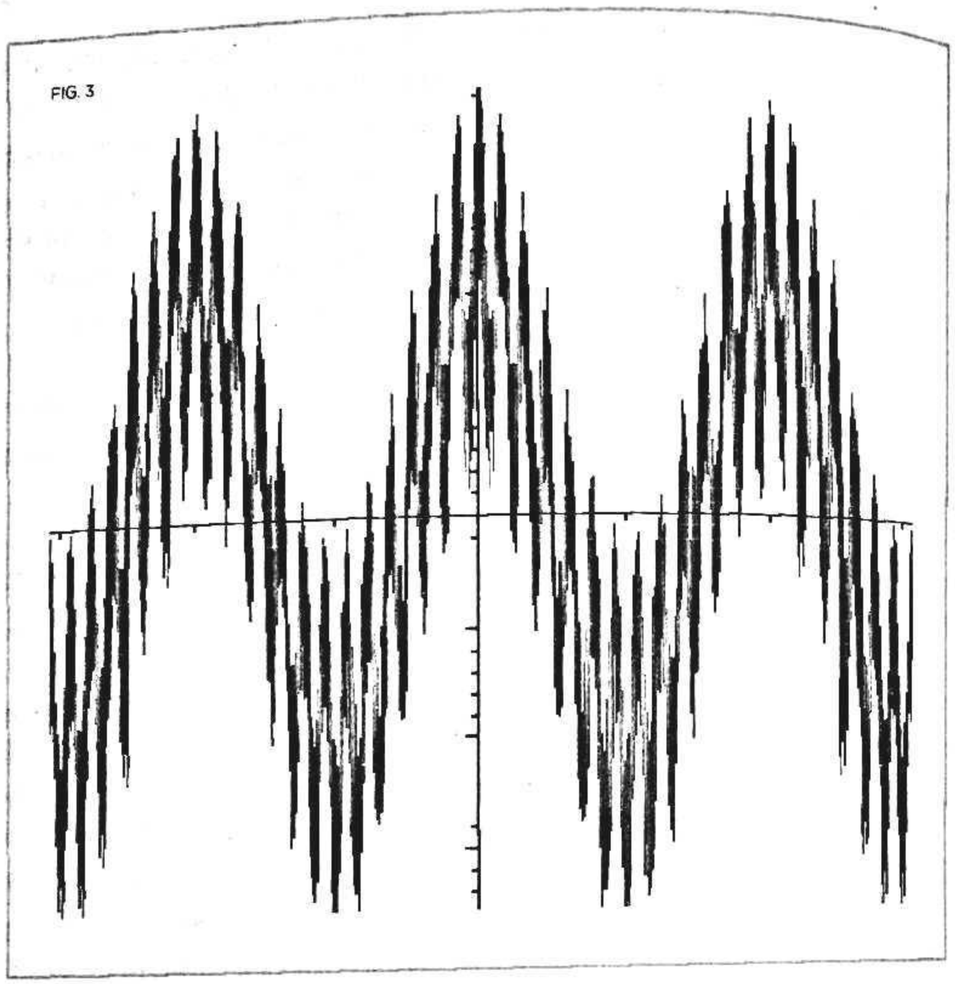
Así pues, un análisis aritmetizado era el nuevo espacio de trabajo, visión que dominó el último tercio del siglo XIX. Por tanto, este ejemplo mostraba la necesidad de una teoría rigurosa de los números reales, que reemplazara las pretenciosas intuiciones que se habían infiltrado en el análisis procedentes de la geometría y también de la cinemática, dedicada al estudio del movimiento.

ALGUNAS RÉPLICAS A WEIERSTRASS

La publicación del contraejemplo de Weierstrass también trajo consigo incredulidad y actitudes de reprobación. Por ejemplo, el matemático francés Charles Hermite (1822-1901) escribió una carta a su colega neerlandés Thomas Jan Stieltjes (1856-1894), comentando que: «Me alejo con pánico y terror de esa lamentable plaga de funciones que no tienen derivadas». Sin embargo, el propio Hermite proclamó posteriormente, en 1900, a Weierstrass como el «maestro de todos nosotros».

Otro conocido matemático francés, Henri Poincaré (1854-1912), calificó como «monstruos» a estas funciones y, en concreto, se refirió al ejemplo de Weierstrass como un atropello contra el sentido común. Afirmó que tales funciones eran una distracción arrogante y de poca utilidad. Así lo escribió: «Antes, cuando una nueva función era inventada, lo era para servir a algún propósito práctico. Hoy se inventan especialmente para mostrar que los argumentos de nuestros padres tienen fallos, pero nunca tendrán ningún otro uso».

Así pues, algunos matemáticos siguieron esta línea de incredulidad. A ello ayudó que nadie podía visualizar la forma de esta extraña función de Weierstrass. En la actualidad puede ser representada con la ayuda de los ordenadores (figura 3) pero, en la época de su aparición, su forma oculta hizo dudar a bastantes



Gráfica de la función de Weierstrass $W(x)$ con $a=1/2$ y $b=13$.

matemáticos. Incluso el estilo que utilizó Weierstrass en la prueba de la no derivabilidad de su función resultó extraño para muchos matemáticos. Sus argumentos, alejados de las analogías con la vida real, involucraban una gran cantidad de pasos lógicos y se prolongaban a lo largo de varias páginas.

Sin embargo, si una función es monótona —creciente o decreciente— la patología del ejemplo de Weierstrass no se puede presentar en ese caso, debido al resultado obtenido por el francés Henri Léon Lebesgue (1875-1941) en 1904, cuando demostró que las funciones monótonas son derivables en su dominio excepto en un conjunto de medida nula, que es un conjunto que tiene longitud cero (por ejemplo, un conjunto finito o numerable). A finales del siglo XIX, el propio Lebesgue, en un trabajo sobre la teoría de la

medida e integración, suscitó un gran optimismo en la comunidad matemática por los avances realizados en este campo.

En la actualidad, tales funciones resultan fundamentales para nuevas áreas de investigación, como las teorías de fractales, caos, ondículas y movimientos brownianos. De hecho, las curvas patológicas, como la de Weierstrass, se presentan hoy como los primeros ejemplos en la teoría de los objetos fractales.

IMPLICACIONES CON FRACTALES

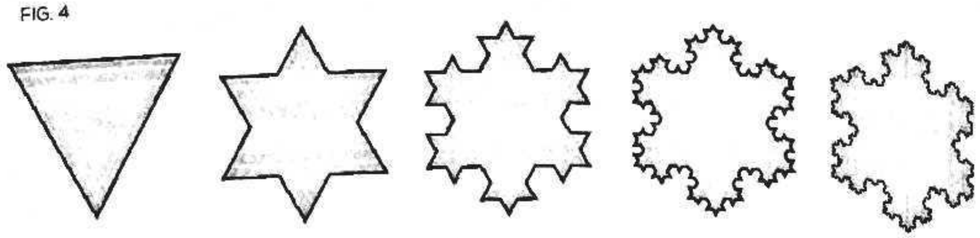
¿Qué entendemos por fractal? Este término fue propuesto por el matemático de origen polaco Benoît Mandelbrot (1924-2010), en el año 1975, para definir un objeto geométrico cuya estructura básica, fragmentada o irregular, se repite a diferentes escalas.

A pesar de la modernidad del término, muchas aplicaciones y conceptos de la geometría fractal eran conocidos mucho antes y en un contexto muy diferente. Un ejemplo de ello es que hoy en día consideramos el grafo de la función de Weierstrass como un fractal.

En este sentido, el matemático sueco Helge von Koch (1870-1924) definió en 1904 una curva fractal llamada el «copo de nieve de Koch», dotada de propiedades similares a la de Weierstrass. En concreto, la curva que ideó Koch era continua y cerrada, pero no derivable en ninguno de sus puntos. Además, a pesar de que encierra un área finita, es de perímetro infinito. En la actualidad sabemos que esta curva sirve como modelo de un copo de nieve y también ayuda a describir la irregularidad de las costas. Anteriormente, en 1890, otro resultado inesperado fue el obtenido por el italiano Giuseppe Peano (1858-1932), quien encontró una curva fractal continua que llenaba un cuadrado sin pasar dos veces por el mismo punto. Debido a su particular construcción, la curva de Peano demuestra que una línea, de dimensión euclídea igual a uno, puede constituirse en un plano, de dimensión euclídea igual a dos. Hoy también sabemos que la estructura de una molécula de ADN se acerca al patrón regular y matemático dado por la curva de Peano, que puede servir además para des-

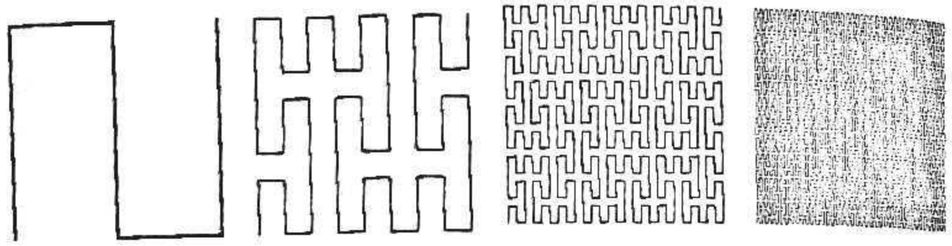
Primeras iteraciones en la construcción del copo de nieve de Koch.

FIG. 4



Primeras iteraciones en la construcción de la curva de Peano

FIG. 5



cribir ciertos retículos de plantas, redes fluviales e incluso cortes cerebrales. Su construcción se sustentaba en el resultado del ruso Georg Cantor (1845-1918), que demostró en 1878 la existencia de funciones biyectivas del intervalo cerrado unidad en el cuadrado unidad, es decir, que en el intervalo [0,1] hay tantos puntos como en el cuadrado $[0,1] \times [0,1]$, lo que contradecía el principio de Euclides de que «el todo es mayor que cada una de sus partes».

No obstante, a diferencia del ejemplo ideado por Weierstrass, estos ejemplos de Von Koch y Peano presentan una definición más geométrica, pues pueden construirse partiendo de una figura inicial, a la que se aplican una serie de construcciones geométricas sencillas. De esta forma, la serie de figuras obtenidas se aproxima a una figura límite que corresponde a lo que hoy se denomina «conjunto fractal». En cualquier caso, al igual que la función de Weierstrass, muchas veces tales conjuntos eran vistos como objetos artificiales catalogados como monstruos, empleando el calificativo de Poincaré.

CULMINACIÓN Y SIGNIFICADO DE LA LABOR REALIZADA

A partir de las brillantes aportaciones de Weierstrass que ya han sido mostradas, podríamos decir que el proceso de aritmetización del análisis culminó en la segunda mitad del siglo XIX con su obra. Así, con la aritmetización del análisis no se trataba simplemente de desgeometrizar el cálculo y de apuntar hacia mejores condiciones lógicas en sus fundamentos. Se trataba, más bien, de una reducción de diferentes nociones conceptuales a nociones aritméticas. Este proceso, significativamente importante, solo podía ser realizado a partir de una nueva abstracción y de la introducción implícita o explícita de supuestos teóricos sobre la existencia y naturaleza de entidades matemáticas.

El impacto de esta nueva precisión en la definición de los conceptos y en las pruebas de los resultados fue inmenso. Solo era aceptable aquello que quedara definido en términos de estructuras previas bien establecidas. De hecho, la aritmetización del análisis no se puede considerar un mero proceso mecánico y simple de rigorización de diversos resultados matemáticos, sino que debe verse integrada en una nueva conciencia, inserta en la evolución de la matemática.

> «En las tres primeras décadas del siglo XIX, las matemáticas de repente se convirtieron en algo muy notablemente diferente de lo que habían sido en la época posnewtoniana del siglo XVIII. El cambio fue en la dirección de un mayor rigor en la demostración seguido de una generalidad y libertad de la creatividad sin precedentes.»
>
> — ERIC TEMPLE BELL, *MEN OF MATHEMATICS*, 1937.

A su vez, el proceso de rigorización posibilitó un gran avance en las diferentes áreas de la producción científica y técnica, y, de hecho, condujo a que, en su conjunto, el siglo XIX fuese un período en el que los avances en matemáticas superaron, tanto en calidad

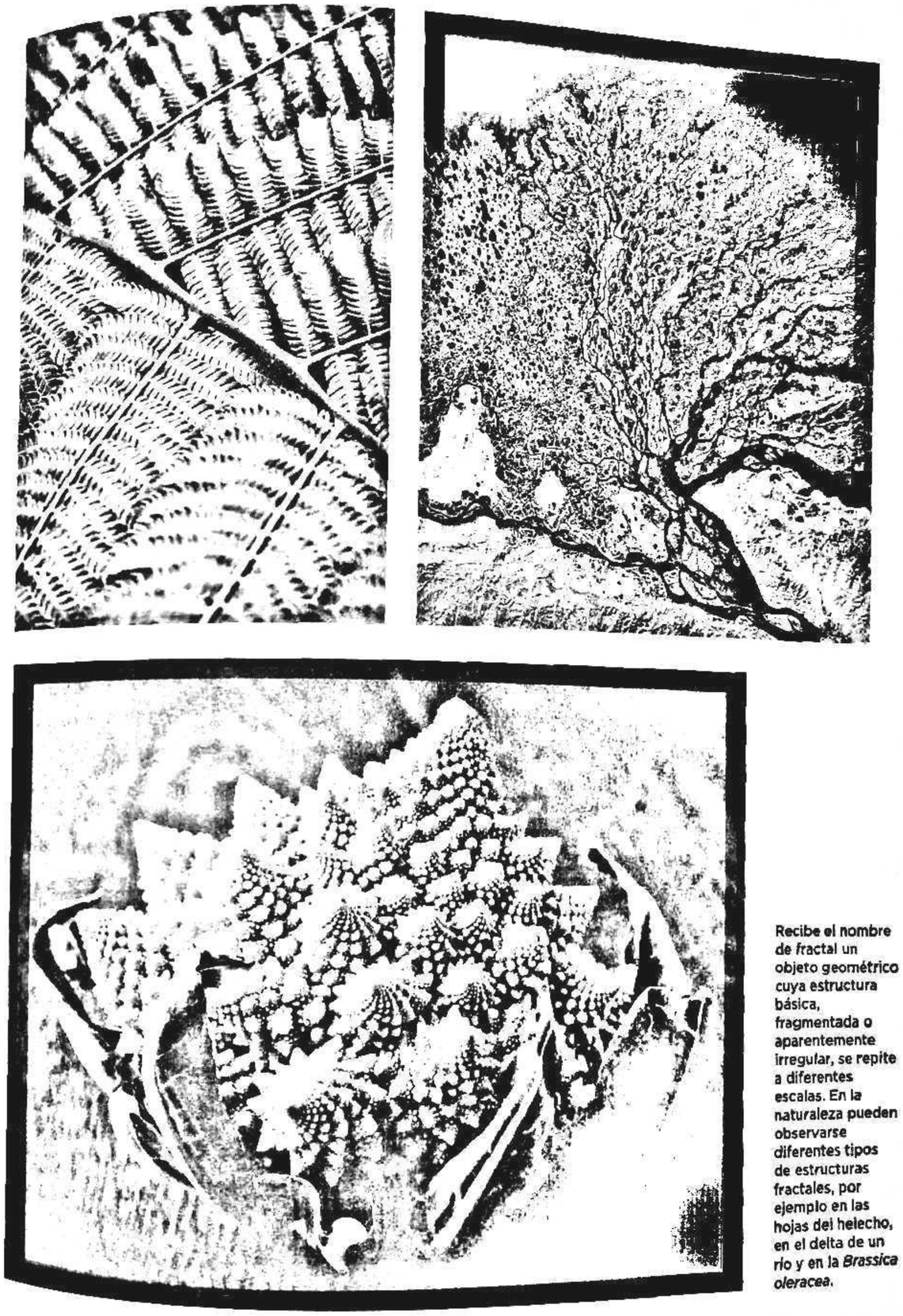
como en cantidad, la producción reunida de todas las épocas anteriores. Además, se crearon algunas academias importantes como la *London Mathematical Society* (1865), la *Société Mathématique de France* (1872) o la *American Mathematical Society* (1888), entre otras, lo cual conllevó implícitamente a la legitimidad social del oficio matemático.

Gracias a todo este proceso, con el paso del tiempo surgió la posibilidad de estandarizar el análisis matemático y ayudar a los estudiantes de cualquier asignatura inicial de cálculo a aprender el mismo contenido matemático de partida, con independencia de la universidad en la que se inscribieran y de los profesores que les impartieran docencia. Esto mismo también ayudó a estandarizar la notación simbólica y el desarrollo de nuevos símbolos.

En contraposición a ello, y en los orígenes de la rigorización, para los matemáticos era muy factible conocer y comprender la práctica totalidad de la producción matemática, distinguiendo claramente aquellos problemas fundamentales de cada área. En cambio, con el transcurso de los años, esta tarea se fue tornando imposible. En la actualidad, cualquier investigador se centra en conocer y dominar las publicaciones más recientes de a lo sumo dos o tres áreas de investigación matemática, lo que dificulta la detección de aquellas líneas de investigación más relevantes. Aunque los especialistas puedan señalar algunas directrices importantes en su propio campo de estudio, no se trata hoy en día de una tarea fácil, pues la gran producción de resultados matemáticos imposibilita el conocimiento y dominio de los investigadores en todos estos avances. Además, a esta dificultad se añade el hecho de que es materialmente imposible que un matemático, en su trabajo diario, compruebe todos y cada uno de los resultados previos en los que apoya su prueba.

SOBRE EL PAPEL DE LA INTUICIÓN

En contraposición a este proceso de aritmetización, el desarrollo del análisis dentro de un marco fuertemente intuitivo y geométri-



Recibe el nombre de fractal un objeto geométrico cuya estructura básica, fragmentada o aparentemente irregular, se repite a diferentes escalas. En la naturaleza pueden observarse diferentes tipos de estructuras fractales, por ejemplo en las hojas del helecho, en el delta de un río y en la *Brassica oleracea*.

co no fue completamente abandonado entre los miembros de la comunidad matemática de finales del siglo XIX y etapas posteriores. Por ejemplo, muchos defendían que incluso en el caso del cálculo infinitesimal, la parte esencial y práctica de esta doctrina matemática se comprendió de manera intuitiva mucho antes de que se llegara a formar una base racional y rigurosa.

En este sentido, como era de suponer, tras el anuncio del ejemplo de Weierstrass de una función continua pero no derivable en ningún punto, hubo una discusión sobre la contribución de la intuición al conocimiento de las matemáticas. Un impulsor de este debate fue Felix Klein, quien, en un artículo publicado en 1873, argumentó y discutió ciertas ideas relativas a la inexactitud de algunas de nuestras intuiciones geométricas. De forma acertada, pensó que estas cuestiones tenían bastante importancia, debido a que la intuición se empleaba de continuo en muchas áreas de las matemáticas, y se preguntaba cómo usarla en las nuevas investigaciones, que catalogaba como analíticas o con base puramente aritmética.

Ciertamente, la intuición y el enfoque geométrico establecido no podían explicar los avances en materia de geometrías no euclídeas, cuaternios o nuevas álgebras, pero no estaba claro, sin embargo, que la construcción matemática pudiera restringirse tan solo a dimensiones lógicas, y que se consiguiera desprender unilateralmente de la intuición. En efecto, a lo largo de la historia, las matemáticas se han ido empleando en actividades muy diversas, vinculadas con el espacio inmediato y con la realidad material.

En cualquier caso, la abstracción ya se atisbó anteriormente, por ejemplo en los siglos XVI y XVII, con la introducción, en apariencia no intuitiva, de los números negativos y complejos, tasas instantáneas de cambio o cantidades infinitamente pequeñas, aunque ciertamente utilizados en problemas relacionados con la física y, por tanto, con una cierta dosis de ingenio e intuición.

De forma paralela, en el propio siglo XIX, algunos autores como Von Koch hicieron esfuerzos por conectar con la intuición algunos de los sorprendentes resultados que iban apareciendo, como por ejemplo el de Weierstrass sobre la existencia de funciones continuas pero no derivables en ningún punto. Estos autores consideraban importante la posibilidad de ilustrar desde un punto de vista geométrico los diferentes nuevos resultados del cálculo infinitesimal y, en este sentido, en relación con la citada función de Weierstrass, Von Koch consideró que era más fácil enfocar esta sorprendente propiedad a partir de su propia función, la curva de Koch, construida como el límite de una sucesión infinita de funciones en la que, en cada paso, se van añadiendo cada vez más puntos donde se pierde la derivabilidad. Su construcción fue la siguiente: partimos de un segmento de longitud igual a 1, en la segunda curva se reemplaza el segmento central de longitud 1/3 por dos lados de un triángulo equilátero de longitudes 1/3; en la tercera curva se reemplaza cada segmento central por dos lados

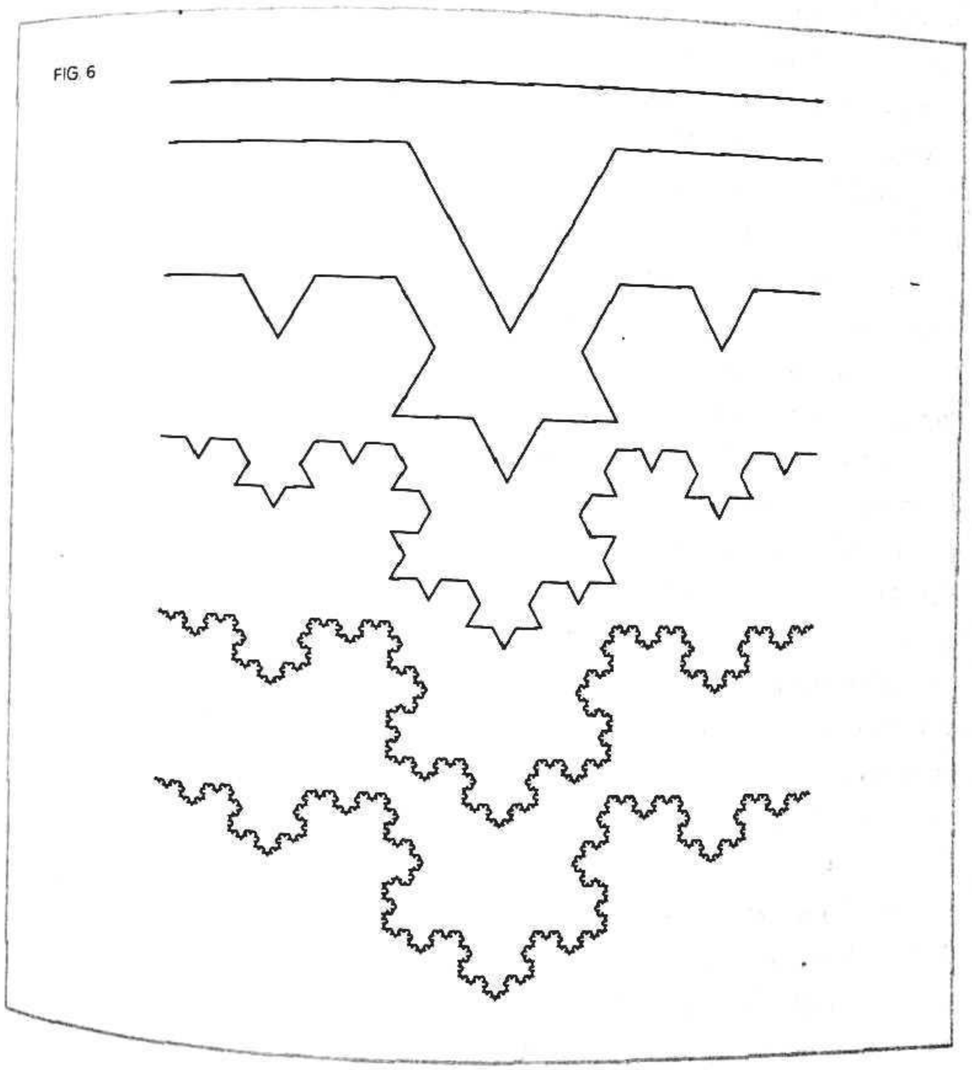


FIG 6

Construcción de la curva de Koch.

más de un triángulo equilátero de longitudes $1/3^2$; y así sucesivamente, como puede apreciarse en la figura 6.

En este contexto, el desarrollo del análisis matemático dentro de un marco fuertemente intuitivo y geométrico es lo que se conoce como el método de descubrimiento, y, por ejemplo, la obra del matemático alemán Bernhard Riemann (1826-1866) muestra que este método puede dar sus frutos. En efecto, Riemann realizó importantes contribuciones al análisis y la geometría diferencial, algunas de las cuales prepararon el camino para el desarrollo más avanzado de la relatividad general. En particular, la referencia geométrica e intuitiva fue la que predominó en Riemann para obtener profundos teoremas que relacionaban la teoría de números con el análisis clásico. Este enfoque le llevó, por ejemplo, a establecer la relación de los números primos con la llamada «función zeta de Riemann»: $\zeta(s)=\sum_{n\geq 1} n^{-s}, s\in\mathbb{C}\setminus\{1\}$, dando lugar a un tópico que continúa captando la atención de eminentes matemáticos de todo el mundo.

Para Riemann, los números complejos eran puntos de un plano. Y una función compleja, una ley por medio de la cual las superficies se podían transformar, así que su objetivo fue el de representar estas transformaciones y analizarlas. Además, el nombre de Riemann va unido también a las llamadas «superficies de Riemann», que son generalizaciones del plano complejo en las que las complicaciones que aparecen ligadas al posible carácter multivaluado de una función quedan evitadas con un ingenioso recurso geométrico. En definitiva, gracias al papel que desempeñó la imagen geométrica, la producción matemática de Bernhard Riemann ha tenido una enorme influencia.

A pesar de ello, el propio Riemann reconoció que sus demostraciones eran a menudo incompletas, y solo con la construcción de nuevas teorías y entes matemáticos podrían ser más tarde subsanadas las posibles lagunas que pudiesen salir en sus desarrollos. Cabe pues complementar las obras de Riemann y Weierstrass como catalizadores de ambas corrientes en el análisis matemático. Según el matemático estadounidense Michel Porter: «En un lenguaje más contemporáneo, podemos decir que los estilos de abordar un tema de Riemann y de Weierstrass corresponden a los hemisferios derecho e izquierdo del cerebro, en que dominan las funciones de imaginación y de razonamiento, respectivamente. Es evidente que, para el buen funcionamiento del organismo, un equilibrio entre ambos es muy deseable.»

CAPÍTULO 4

La repercusión de Weierstrass como maestro

Los cursos regulares que impartió Weierstrass en la Universidad de Berlín fueron la vía elegida para la transmisión de sus progresos matemáticos, como es el caso de su influyente teorema de aproximación. *Grosso modo* puede afirmarse que Weierstrass demostró que cualquier función continua se puede aproximar mediante un polinomio hasta la precisión deseada, resultado que deslumbró a la comunidad matemática.

La Universidad de Berlín, por la que han pasado muchos de los grandes intelectuales y científicos alemanes de los dos últimos siglos, goza de un gran prestigio y ha servido como modelo para otras universidades e instituciones académicas de distintos países occidentales. Fue fundada en 1810 y su nombre oficial actual es Humboldt-Universität zu Berlin.

A lo largo de sus dos primeras décadas de existencia, la universidad berlinesa no fue especialmente relevante en el área de las matemáticas. En este contexto, el país más influyente en ese momento —desde principios del siglo XVIII y sobre todo en la segunda mitad de esa centuria— era sin duda Francia.

Cabe decir que la actividad científica en el siglo XVIII, llamado el «Siglo de las Luces», estuvo centrada alrededor de las academias, entre las cuales sobresalían las de París, Berlín y San Petersburgo. A lo largo de ese período, los grandes dirigentes europeos se fueron rodeando de importantes hombres de ciencia, quienes aportaron sus conocimientos al desarrollo militar y de la manufactura.

Por otra parte, la controversia existente a principios del siglo XVIII entre los discípulos de Leibniz y Newton sobre cuál de los dos fue el inventor del cálculo produjo efectos deplorables sobre las matemáticas inglesas durante casi un siglo. Por ejemplo, la mayoría de los matemáticos de las Islas Británicas no aceptaron

durante mucho tiempo el simbolismo, a la postre generalmente aceptado, que introdujo Leibniz en el ámbito del cálculo infinitesimal, considerando su utilización una vía de desprecio a la memoria de Newton. Sin embargo, en Francia, la matemática se concibió como la ciencia que permitiría perfeccionar el cálculo y, en parte gracias a ello, a lo largo de toda esa época, y más concretamente en París, se dispuso de una gran cantidad de matemáticos de la talla de Joseph-Louis Lagrange, Gaspard Monge (1746-1818), Pierre-Simon Laplace, Adrien-Marie Legendre, Sylvester François Lacroix, Joseph Fourier, Siméon Poisson (1781-1840) o Augustin-Louis Cauchy.

LA EDAD DE ORO DE LAS MATEMÁTICAS ALEMANAS

El área de matemáticas de la Universidad de Berlín experimentó un ligero ascenso a partir de 1830, con la entrada de Carl Gustav Jakob Jacobi (1804-1851), Johan Peter Gustav Lejeune Dirichlet y Jakob Steiner (1796-1863). Aunque fue, sin lugar a dudas, en la segunda mitad del siglo XIX, de la mano de Weierstrass, Leopold Kronecker (1823-1891) y Ernst Kummer (1810-1893) cuando esta universidad pasó a liderar el panorama matemático mundial. En concreto, Kummer se incorporó en 1855, y Kronecker lo hizo en 1856, el mismo año que Weierstrass ya empezó a trabajar en dicho centro docente, antes de obtener su plaza definitiva de titular en 1864.

LA LABOR DOCENTE DE WEIERSTRASS

Karl Weierstrass está considerado como uno de los mejores profesores universitarios de análisis de la historia. Todo parece indicar que sus lecciones eran auténticos modelos de perfección, fieles al método socrático de interrogación y concatenación lógica de las respuestas sobre el que tuvo que preparar una disertación en Münster, con ocasión de su examen de ingreso en la enseñanza

secundaria. A través de este método, el maestro trata que los estudiantes, por medio de preguntas, vayan descubriendo conocimientos, exigiendo en general un gran esfuerzo intelectual e involucrándolos en un proceso de pensamiento fructífero y diversificado. Karl consideraba que, además de un indiscutible rigor, un buen matemático necesita tener imaginación, lo que trataba de conseguir en sus clases.

> «Un matemático que no es también algo de poeta nunca será un matemático completo.»
>
> — KARL WEIERSTRASS, 1891.

Así pues, las lecciones de Weierstrass resultaban ser desafiantes, ya que no consistían en exposiciones totalmente finalizadas en sus contenidos. Más bien ponía énfasis en los puntos o contenidos temáticos más importantes, y trataba que los alumnos se sintieran inspirados para poder completarlos y ampliarlos de forma gradual. Como consecuencia de un esfuerzo continuo, este método permitió formar, en una proporción extremadamente elevada de sus discípulos, a grandes matemáticos cuyos trabajos tuvieron una gran repercusión. Sus pensamientos en torno a este tutelaje y, más generalmente, al proceso de enseñanza-investigación de las matemáticas, quedaron reflejados en su discurso del 15 de octubre de 1873, con ocasión de su acceso al cargo de rector de la Universidad de Berlín. Cabe decir también que, a pesar de las múltiples tareas del maestro, Weierstrass fue siempre accesible a sus discípulos, y al parecer se interesaba tanto en sus problemas matemáticos como humanos.

Además, a diferencia de otros matemáticos que preferían publicar sus descubrimientos en revistas reconocidas y libros de gran impacto, Weierstrass comunicaba su trabajo a través de sus cursos en la Universidad de Berlín. De esta forma, la mayoría de sus descubrimientos eran primeramente presentados —en ocasiones de manera única— en sus lecciones, lo que le dio un carácter pedagógico extra a la forma de plantear los nuevos enfoques ideados.

Y aunque es posible que muchas veces sus oyentes no supieran lo que pertenecía al maestro y lo que correspondía a otros autores, si no hubiera sido por la difusión que sus discípulos hacían de sus conferencias y lecciones, su influencia sobre el pensamiento matemático del siglo XIX se habría demorado considerablemente.

Por tanto, no cabe duda de que fue tremenda la importancia que tuvo la docencia en la carrera investigadora de Weierstrass. En este mismo sentido, el *Cours d'analysis* de Cauchy estuvo basado en sus clases en la École Polytechnique y, de hecho, este libro es considerado como el primer ejemplo de la tradición francesa de los cursos de análisis. También Lagrange empezó a interesarse por los fundamentos del cálculo cuando se encontraba impartiendo clases en la Academia Militar de Turín y, años más tarde, escribió sus importantes trabajos sobre esta materia siendo catedrático de análisis en la misma École Polytechnique. Otro ejemplo significativo sobre esta relación enseñanza-investigación, lo encontramos en Dedekind, quien inició sus trabajos sobre la continuidad mientras enseñaba en Zurich.

TRAYECTORIA ACADÉMICA

Algunos autores califican la etapa comprendida entre los años 1855 y 1892 como el «período heroico» o la «Era Kummer–Weierstrass–Kronecker», cuando la Universidad de Berlín vivió su momento álgido para la instrucción e investigación en matemáticas, y en la que surgió una escuela genuina de grandes matemáticos.

Las primeras lecciones impartidas por Weierstrass en la Universidad de Berlín tuvieron lugar en el invierno del curso académico 1856-1857. Versaron sobre la física matemática (recordemos que, a efectos históricos, muchas áreas de las matemáticas se desarrollaron por el estímulo proporcionado por problemas procedentes de la ciencia física). A partir del siguiente curso, realizado en verano de 1857, fue incorporando contenidos específicos acerca de las funciones analíticas y elípticas, que pronto se convertirían en elementos estrella de sus clases. Los fundamentos del análisis empezaron a tratarse en sus clases del curso 1859-1860.

Sin embargo, tras dejar ya una gran impronta a lo largo de estos primeros años, a finales de 1861 los problemas de salud le impidieron impartir clases durante ese curso académico, retomando la actividad en el invierno del curso 1862-1863. Durante el resto de su vida siguió padeciendo distintos ataques de vértigo y mareos, lo que le hizo tomar la costumbre de sentarse en un sitio desde donde pudiera ver al mismo tiempo a los oyentes y la pizarra, y muchas veces dictaba a algún discípulo lo que debía escribir.

A partir de su regreso a las clases y de la obtención de su plaza titular, Weierstrass impartió en Berlín una serie de ciclos de cursos, generalmente de dos años de duración, organizados en cuatro semestres, cuyo esquema general comprendía los siguientes asuntos: la teoría de las funciones analíticas, la teoría de las funciones elípticas, la teoría de las funciones abelianas, y las aplicaciones de las funciones elípticas en el terreno de la geometría y la mecánica. No obstante, en esta última temática, Weierstrass también ideó lecciones concretas sobre otros contenidos más específicos, como el cálculo de variaciones, que constituye una generalización del cálculo elemental de máximos y mínimos de funciones reales de una variable real y en el que las variables son funciones. Pero, más allá de sus principales contribuciones al análisis matemático, sus indagaciones llegaron a otros campos, como el de la teoría de las formas bilineales y cuadráticas, que es propio del álgebra lineal. Sin embargo, sus descubrimientos más importantes y trascendentes sí que fueron en el ámbito del análisis, por lo que la distribución anteriormente mostrada de sus cursos regulares no nos debería sorprender, sobre todo si tenemos en cuenta sus investigaciones iniciales, realizadas en su etapa en Münster.

De esta forma, los dos semestres al año comprendían el período de invierno, que comenzaba en la primera quincena de octubre y llegaba aproximadamente a febrero (a finales de diciembre tenían dos semanas de vacaciones de Navidad), y el período de verano, que abarcaba desde principios de mayo hasta finales de julio. Normalmente, al principio del curso las clases se abarrotaban de alumnos, que poco a poco iban menguando en número, hasta quedarse en una cantidad mucho menor, que correspondía, por lo general, a los alumnos más aventajados.

Sus lecciones de análisis se extendieron hasta 1889. Llegó a anunciar más lecciones para el siguiente curso, cuya temática hubiera versado seguramente sobre los teoremas fundamentales del análisis matemático, pero la mala salud le impidió continuar con sus lecciones. En su último curso impartido pudo incluir otro de sus hallazgos más conocidos en la actualidad: el teorema de aproximación que lleva su nombre.

EL SEMINARIO DE MATEMÁTICAS

En el transcurso de este período, los estudiantes de la Universidad de Berlín tuvieron la posibilidad de asistir a otros cursos de matemáticas impartidos por profesores asistentes y otros instructores especiales, pero las clases más frecuentadas, además de las de Weierstrass, fueron las de Kronecker y Kummer. Las lecciones de Kronecker versaban sobre contenidos encuadrados en áreas como la teoría de números, las ecuaciones algebraicas, las integrales simples y múltiples o la teoría de determinantes. Por su parte, Kummer impartía cursos que cubrían parte de la geometría analítica, la mecánica, la teoría de las superficies y la teoría de números. Al parecer, y a diferencia de las que impartía Kronecker, las conferencias de Kummer resultaban fáciles de seguir por la mayoría de los estudiantes.

Por otra parte, de forma complementaria a las lecciones que acabamos de relatar, otra participación importante de Weierstrass fue la relativa a la creación y el desarrollo del Seminario de Matemáticas de Berlín, el primer seminario de matemáticas puras en una universidad alemana. En concreto, los trámites para su constitución fueron iniciados en 1860 por Kummer y Weierstrass, y la primera sesión tuvo lugar el 8 de mayo de 1861. El objetivo era ayudar a un grupo limitado de estudiantes competentes a continuar sus estudios y formarlos adecuadamente, a través de discusiones sobre la resolución de distintos problemas matemáticos, con tal de que en un futuro cercano pudieran prosperar en tareas de docencia o investigación. El número anual de estudiantes integrado en el seminario era limitado, en concreto doce, por lo que, para seleccionarlos, hacía falta realizar cribas a través de exámenes o mediante

FOTO SUPERIOR IZQUIERDA.
Karl Weierstrass, retratado a la edad de ochenta años por Conrad Fehr.

FOTO SUPERIOR DERECHA.
Grabado del siglo XIX que muestra la fachada principal de la Universidad de Berlín.

FOTO INFERIOR.
La catedral y la Isla de los Museos a orillas del río Esprea, en Berlín. La ciudad alemana se convirtió en uno de los más importantes centros de estudio de las matemáticas del mundo entero en el siglo XIX, gracias, en parte, a la labor de Kummer, Weierstrass y Kronecker.

la presentación de méritos en forma de trabajos de investigación previamente realizados. El seminario estuvo en pleno funcionamiento a lo largo de veinte años. Una de las buenas costumbres establecidas cada año era la del planteamiento de un problema matemático cuya resolución conllevaba un premio de investigación, que ayudaba a que los buenos estudiantes fueran reconocidos.

Este seminario propició enormemente la lectura y el análisis de grandes obras matemáticas. Weierstrass se esforzó en que dispusiera de una biblioteca propia, que incluía obras de Cauchy, Abel, Euler, Poisson, Monge... además de suscripciones a las mejores revistas de la época, como *Crelle* o el *Journal de Liouville*. Weierstrass se empeñó en tratar de conseguir el mayor número posible de recursos bibliográficos.

Otra de las gratas consecuencias de la creación del seminario, propiciada por la restricción en cuanto al número de alumnos, fue la necesidad de formar otros grupos o asociaciones de estudiantes que organizaban conferencias, coloquios o debates en torno a distintos problemas y resultados matemáticos. El propio Weierstrass participó activamente en tales actividades.

No cabe duda pues que la Universidad de Berlín experimentó un enorme crecimiento a lo largo de todos estos años, convirtiéndose en un modelo para otras universidades e instituciones académicas europeas. A la vista de las actividades científicas que se desarrollaron y de la trascendencia del trabajo teórico realizado por Weierstrass en torno al proceso de aritmetización del análisis, y más tarde de los trabajos de Cantor y Dedekind sobre la fundamentación de la recta real, Alemania se convirtió en el centro de la matemática mundial. Todos aquellos realmente interesados en aprender matemáticas tenían a Berlín como posible destino para asistir a los cursos de Weierstrass y sus colegas, o para participar en sus seminarios y actividades.

Esta situación perduró durante muchos años, incluso en la época posterior a la de Weierstrass. En efecto, las siguientes dos décadas fueron tomadas por Gotinga (Göttingen en alemán), universidad que, bajo Felix Klein y David Hilbert, emergió como el centro matemático pujante en Alemania. A modo de ejemplo, no fue hasta que el matemático Julio Rey Pastor (1888-1962) realizó una serie de estancias en el país germano, a partir de 1911 y bajo la tutela de Klein, que se introdujo en España el rigor de las teorías desarrolladas por Cauchy, Weierstrass, Cantor y Dedekind. A Julio Rey Pastor se le considera uno de los grandes renovadores de las matemáticas en el mundo de habla hispana.

EL TEOREMA DE APROXIMACIÓN DE WEIERSTRASS

No cabe duda de que Weierstrass centró su vida en torno a las matemáticas. Su nombre se asocia a una gran cantidad de resultados tremendamente significativos. Otro de los importantes teoremas que demostró en su exitosa carrera académica fue el conocido actualmente como «teorema de aproximación de Weierstrass», catalogado por muchos autores como uno de los de mayor importancia de las matemáticas.

> «La base de la teoría de aproximación de funciones de una variable real es un teorema descubierto por Weierstrass, que es de gran importancia para el desarrollo del conjunto del análisis matemático.»
>
> — ALEKSANDR FILIPPOVICH TIMAN, *THEORY OF APPROXIMATION OF FUNCTIONS OF A REAL VARIABLE*, 1963.

En concreto, Karl Weierstrass demostró en 1885, a la edad de setenta años, que cualquier función continua definida en un intervalo real $[a,b]$, $a<b$, puede ser uniformemente aproximada por un polinomio, resultado que se convertiría en el catalizador de una nueva rama del análisis: la teoría de aproximación. Este teorema apareció en un artículo publicado en dos partes, en las actas de la Academia de Berlín, y despertó un interés enorme desde el momento de su publicación. De hecho, un año después fue traducido al francés en la conocida revista *Journal de Liouville*.

Como señalamos anteriormente, una gran cantidad de situaciones de la vida cotidiana pueden ser modeladas con la ayuda de

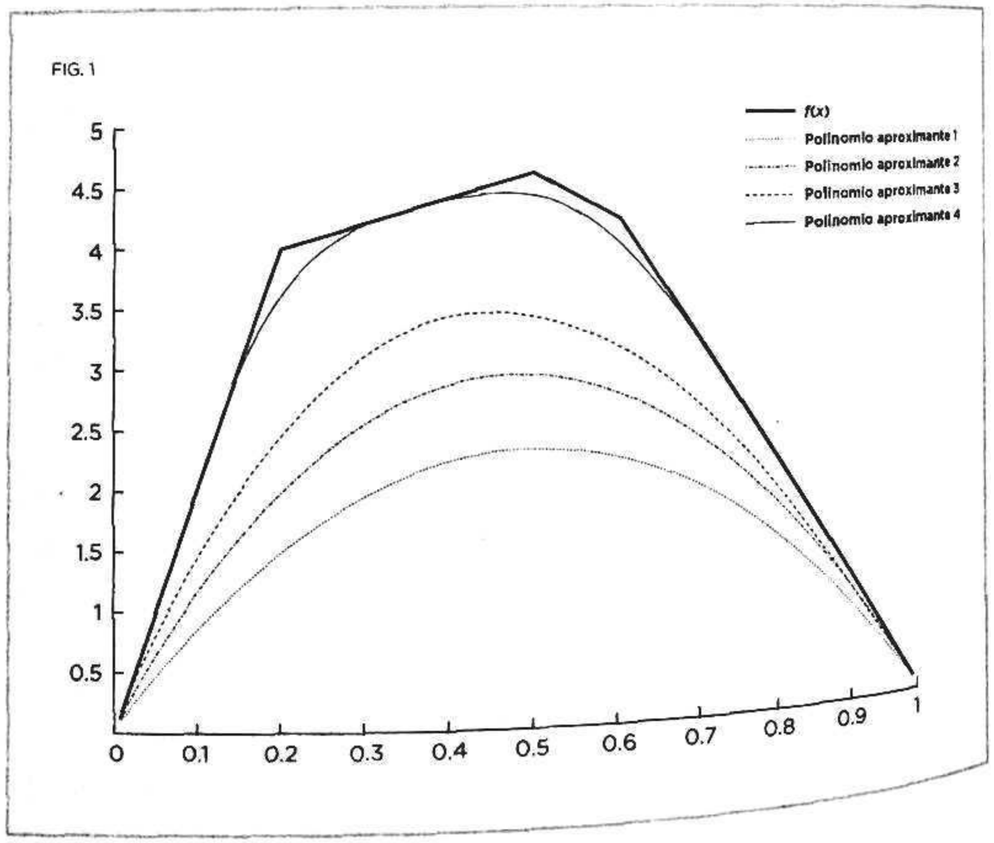
funciones reales, y muchas veces la continuidad suele ser un requisito no muy restrictivo. En esta dirección de trabajo, a menudo interesa obtener los puntos para los que una función alcanza un cierto valor constante y, en particular, tratar de resolver la ecuación $f(x)=0$, donde $f(x)$ es la función real objeto de estudio. Si $f(x)$ es algo sofisticada, esta tarea puede resultar muy complicada y, en muchas ocasiones, ni siquiera es viable. Sin embargo, esta situación cambia mucho cuando se manejan funciones polinómicas, es decir, funciones del tipo

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n,$$

donde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son números reales y n es un número natural. Así pues, los polinomios se definen de forma sencilla y constituyen herramientas muy útiles de trabajo, ya que sobre ellos podemos considerar distintos métodos que nos facilitan enormemente nuestro trabajo. Por ejemplo, sus imágenes pueden ser calculadas rápidamente usando sistemas computacionales o pueden ser fácilmente derivados e integrados.

Aproximación por polinomios.

FIG. 1



En este sentido, dado que obviamente no toda función continua es un polinomio, el teorema de Weierstrass resulta vital para garantizar que, en cualquier caso, podremos utilizar una función polinómica que nos permita obtener resultados en nuestras aplicaciones con funciones continuas, aunque sea con un mínimo margen de error. De hecho, a pesar de la posible naturaleza inimaginablemente irregular de la gráfica de una función continua, Weierstrass garantizó la posibilidad de encontrar un polinomio que aproxime uniformemente la función en cualquier grado de precisión prefijado, y, por lo tanto, que esta diferencia apenas se haga notar entre las gráficas de ambas funciones restringidas a un intervalo cerrado, propiedad imprescindible, por ejemplo, para aproximar el área que encierra la función en tal intervalo. Esto resulta suficiente en la gran mayoría de las aplicaciones que los especialistas de matemática aplicada se encuentran en ámbitos como el de la ingeniería, la biología, etc.

A la vista de la gráfica de las funciones continuas pero no derivables en ningún punto mostrada en el capítulo anterior, el resultado de aproximación de Weierstrass es realmente sorprendente, ya que incluso estas funciones pueden ser aproximadas por una función derivable cuyas derivadas son continuas.

En realidad, antes de Weierstrass ya se sabía que esta propiedad de aproximación mediante polinomios se verificaba para un tipo particular de funciones más restrictivas, en las que la hipótesis de derivabilidad resultaba fundamental. Esta propiedad era conocida como «teorema de Taylor», al haber sido enunciada en 1712 por el matemático británico Brook Taylor (1685-1731). Sin embargo, Weierstrass pudo idear una demostración de la propiedad de aproximación para el caso mucho más general de las funciones continuas, lo que permitió obtener relevantes aplicaciones en muchos ámbitos, incluyendo los campos de la topología y el análisis numérico. Además, desde el punto de vista teórico, este teorema resulta muy útil para simplificar la demostración de muchos otros teoremas. Con posterioridad se dedicaron muchos esfuerzos a tratar de generalizar el teorema de aproximación de Weierstrass y, de hecho, el

matemático estadounidense Marshall H. Stone (1909-1989) lo generalizó en distintos sentidos y simplificó su prueba, dando lugar al actualmente llamado «teorema de Stone-Weierstrass».

Por otra parte, el teorema de Weierstrass está relacionado con la interpolación polinómica, en la que se trata de obtener polinomios que toman el mismo valor que la función dada en un número finito de puntos prefijados. Conviene resaltar en este punto que las técnicas propias de interpolación se pueden utilizar, por ejemplo, en la descripción del movimiento de los objetos, como función del tiempo, a partir de un conjunto concreto de mediciones de las posiciones del objeto dado.

Una demostración constructiva del teorema de aproximación de Weierstrass se consiguió posteriormente a través de los polinomios de Bernstein, introducidos por el soviético —de origen ucraniano— Sergéi Bernstéin (1880-1968) a partir de ideas probabilísticas. En el ámbito de la informática, la facilidad que ofrecen los polinomios proviene fundamentalmente del hecho de poder expresarlos como una combinación lineal de elementos base, lo que hace que la representación interna venga dada en forma de vectores de coeficientes reales.

«Los jóvenes doctores en Matemática que buscan ansiosamente cargos donde su disciplina y talentos puedan desempeñar algún papel, muchas veces se preguntan si es posible para un hombre realizar largo tiempo la enseñanza elemental y mantener viva la llama matemática. La vida de Boole es una respuesta parcial; la carrera de Weierstrass, el príncipe de los analistas, "el padre del Análisis moderno", es concluyente.»

— **E.T. Bell**, *Los grandes matemáticos*.

Con vistas a su uso en el diseño asistido por ordenador (por ejemplo, para el trazado de dibujos técnicos o en el diseño aeronáutico y de automóviles), se toman distintas bases en función del grado de adecuación que deseemos en nuestras representaciones; una de las bases más conocidas es la de los polinomios de Bernstein. En concreto, el esquema de modelado de las curvas resultantes se conoce con el nombre de «curvas de Bézier», y fue introducido a finales de la década de 1950 en la industria automovilística. Más tarde, los creadores del PostScript, lenguaje que permitió el desarrollo de sistemas de impresión de alta calidad desde el ordenador, introdujeron en su código el método de Bézier, que se convirtió hace ya algún tiempo en un estándar de calidad universal, pues constituye una potente herramienta en gráficas computarizadas. De hecho, conocidos programas de diseño vectorial, como el Adobe Illustrator o el Corel Draw, denominan *bézier* a algunas de sus herramientas de dibujo. Su uso se ha extendido incluso a algunos programas de retoque fotográfico y animación vectorial, como Adobe Flash o Photoshop.

LOS DISCÍPULOS DE WEIERSTRASS

Las lecciones de Weierstrass en Berlín alcanzaron gran fama internacional, lo que atrajo a muchos interesados que pasaron por sus clases a lo largo de los años de docencia en la universidad berlinesa. Se cuentan un total de cuarenta y dos discípulos directos de Weierstrass, que realizaron la tesis bajo su tutela, y más de tres mil discípulos. Entre los primeros figuraron Georg Cantor, Ferdinand Georg Frobenius (1849-1917), Lazarus Fuchs (1833-1902), Leo Königsberger (1837-1921), Hermann Schwarz (1843-1921), Wilhelm Killing (1847-1923), Hans von Mangoldt (1854–1925) y Carl Runge (1856-1927).

Los alumnos que pasaron por su tutela intelectual ocuparon puestos importantes en diversas universidades, y más de cien se convirtieron en profesores universitarios. A este respecto se relata que cuando el matemático sueco Gösta Mittag-Leffler (1846-1927) llegó a París en 1873, para estudiar análisis con el célebre profesor francés Charles Hermite (1822-1901), este le espetó la siguiente frase: «Estáis equivocado, señor, debéis seguir el curso de Weierstrass en Berlín. Es el maestro de todos nosotros», oportunidad que Mittag-Leffler no dejó de aprovechar.

LA RELACIÓN CON SOFIA KOVALEVSKAYA

Mención aparte merece el caso de Sofia Kovalevskaya (1850-1891), destacada discípula de Weierstrass, cuyo nombre fue omitido antes a propósito. Sofia, nacida en Moscú, fue pionera en la igualdad de género en la ciencia, siendo la primera mujer que consiguió una plaza de profesora universitaria en Europa, además de realizar contribuciones relevantes en las áreas de análisis, ecuaciones diferenciales y mecánica. Parece ser que desde pequeña poseía un talento innato y, bien aconsejada, decidió partir hacia Berlín para seguir los cursos de Weierstrass y no abandonar sus estudios, ya iniciados en Heidelberg (ciudad del sudoeste de Alemania).

Sin embargo, la educación de las mujeres no estaba normalizada en aquella época, y Sofia no fue inicialmente aceptada como alumna regular de la universidad. De ahí que Weierstrass, a pesar de sus numerosas obligaciones, decidiera impartirle clases particulares, que se prolongaron durante un período aproximado de cuatro años.

Ya desde su primer encuentro, Sofia resolvió correctamente y con un toque de originalidad una serie de problemas que su profesor le había propuesto a modo de prueba. De esta manera, Weierstrass reconoció el talento de la alumna, sugiriéndole más tarde que se adentrara en temas de investigación de gran trascendencia, y proponiéndole problemas que tenía resueltos en algunos casos particulares. A lo largo de esos cuatro años que Sofia pasó en Berlín, Weierstrass y ella se convirtieron en grandes amigos y compañeros de discusiones científicas. Más adelante, la discípula fue artífice de grandes avances matemáticos y consiguió premios de investigación.

Weierstrass realizó distintas gestiones para que no se perdiera el talento de Sofia cuando esta decidió retirarse del mundo matemático y vivir en Rusia junto a su marido. Maestro y alumna intercambiaron más de 160 cartas durante veinte años, hasta 1890. Alguna de esas misivas, junto con otras enviadas a distintos discípulos, se conservan en el Instituto Mittag-Leffler de Estocolmo (Suecia) y en instituciones alemanas.

Cabe comentar que, gracias a Mittag-Leffler, quien estuvo en Berlín asistiendo a las clases de Karl, Sofia fue nombrada profesora en la Universidad de Estocolmo, con plaza definitiva desde 1889.

LA HORA DE LOS HOMENAJES

Por otra parte, en 1885, cuando Weierstrass cumplió 70 años, se le rindió un sentido homenaje en el que participaron muchos discípulos de todas las partes de Europa. Tampoco faltaron colegas

UN TRIUNFO TARDÍO

A Karl Weierstrass, la fama como matemático le llegó tardíamente en el tiempo, pues construyó sus teorías y obtuvo magníficos resultados a una edad avanzada. En términos generales suele ser más habitual que los grandes logros de investigación se consigan a una edad más temprana, pues una mente joven puede estar en mejor disposición para innovar que otra que ya haya recibido ciertos condicionantes académicos y formativos. En este sentido, la Medalla Fields, considerada junto con el premio Abel como el mayor reconocimiento honorífico que un matemático puede recibir, se otorga a matemáticos que no han superado los 40 años de edad. Este galardón, concedido cada cuatro años por la Unión Matemática Internacional, se entregó por vez primera en 1936.

Anverso de la Medalla Fields

Investigadores de edad avanzada

No obstante, además de Weierstrass, podemos encontrar en la hemeroteca algunos casos de grandes matemáticos que también empezaron su carrera de investigación de forma tardía, como Felix Haussdorf (1868-1942), o que también obtuvieron grandes resultados en edades avanzadas, como es el caso de Carl Friedrich Gauss (1777-1855).

de trabajo y amigos de la época, pero también asistieron muchos antiguos estudiantes que habían pasado por sus clases, y distintas personalidades académicas, como el rector y el decano de la facultad de la Universidad de Berlín. A modo de obsequio para felicitar y agradecer su grandísima labor, se realizó un álbum de fotos que finalmente contuvo más de trescientos retratos de antiguos alumnos de Weierstrass, Kummer y Kronecker en la universidad berlinesa. Este memorable regalo —junto con una medalla y un busto en su honor, entre otros presentes— le fue entregado el 31 de octubre en su piso de Berlín, acto al que siguió una cena distendida, en la que se pronunciaron discursos en torno a los logros del maestro. Todos estos gestos fueron muy apreciados por Weierstrass y conforman una irrefutable prueba de que era una persona muy querida y respetada, en particular por muchos de sus antiguos alumnos.

Más tarde, como es natural, sus lecciones fueron cada vez más escasas, pero durante casi diez años siguió recibiendo a algunos de sus discípulos en su propia casa. Cuando los alumnos veían que el viejo profesor se fatigaba, trataban de hablar de otras cosas y escuchaban con atención los recuerdos del pasado del sociable Weierstrass.

En su octogésimo aniversario, Weierstrass recibió otro homenaje de estudiantes, amigos y colegas. Bajo supervisión médica, se sentó en su silla de ruedas y durante aproximadamente un par de horas escuchó y correspondió a los distintos discursos pronunciados en una emotiva ceremonia, en la que fue tratado como una especie de héroe nacional.

Weierstrass pasó los últimos años de su vida en silla de ruedas. Falleció el 19 de febrero de 1897 víctima de una neumonía, a la edad de 82 años. Fue enterrado en el cementerio Sankt-Hedwig-Friedhof I, en el centro de Berlín. Sin embargo, la construcción del Muro de Berlín (1961) obligó a trasladar sus restos a una nueva tumba, situada a pocos metros de distancia, que hasta 2015 tuvo el estatus oficial de tumba honoraria del Senado de Berlín. A partir de entonces, el Instituto Weierstrass de Análisis Aplicado y Estocástico de Berlín se ha hecho cargo del mantenimiento de la tumba.

LA RELACIÓN CON KRONECKER Y LA PUBLICACIÓN DE SUS OBRAS COMPLETAS

Leopold Kronecker y Karl Weierstrass fueron buenos amigos durante más de veinte años. A lo largo de ese tiempo, no solo entablaron una relación cordial, propiciada por el trabajo común en la Universidad de Berlín, sino que también compartieron ideas y discusiones matemáticas muy fructíferas, que ayudaban a incrementar la popularidad de sus respectivas clases y a mejorar sus tareas académicas.

Buena parte de las investigaciones de Kronecker se centraron en la teoría de números y el álgebra. Varios resultados y conceptos llevan el nombre de este talentoso matemático.

A partir de la década de 1870, las relaciones entre ambos profesores se enfriaron, debido a que Kronecker se pronunció de modo rotundo en contra de algunas ideas matemáticas apoyadas por Weierstrass. En concreto, su reticencia se enfocaba en la significación de las pruebas de existencia no constructivas, y, en particular, sobre las investigaciones de Georg Cantor en torno al infinito (recordemos que Cantor fue uno de los más talentosos discípulos de Karl en Berlín).

La impetuosa oposición de Kronecker alcanzó a algunos de los trabajos sobre la fundamentación de los números reales; en particular se opuso al uso de los números irracionales, tal como empezaban a ser concebidos. A este respecto, la *noción* del infinito experimentó una fuerte revolución con los trabajos de Cantor, ya que, como se señaló anteriormente, su teoría contemplaba distintos tipos de *infinito*: el de los *números* naturales, el del continuo de los números reales, etc.

Kronecker tuvo muchos reparos sobre las pruebas presentadas para estas teorías y, en tal sentido, su frase más conocida, «Dios hizo los números enteros, todo lo demás es obra del hombre», pronunciada en Berlín en 1886, encajaba muy bien en su pensamiento. Para Kronecker, los *conceptos* y las deducciones matemáticas eran admisibles cuando se podían describir mediante procedimientos constructivos en un número finito de pasos; pensaba incluso que los números trascendentes no existían, y, de

hecho, en una de sus conferencias llegó a afirmar que las pruebas que se habían realizado sobre la trascendencia de algunos números eran vacías de contenido y carecían de consecuencia.

En definitiva, sus ideas divergían de las de Cantor y Weierstrass, pero también de las de otros matemáticos que presentaron trabajos de investigación encaminados en el mismo sentido, como es el caso de Eduard Heine (1821-1881), Carl Louis Ferdinand von Lindemann (1852-1939) o Richard Dedekind. Con tal de rebatirlas y que no se expandieran, además de mostrar abiertamente sus discrepancias ante los estudiantes universitarios y en otros ambientes académicos, trató incluso de impedir la publicación del trabajo de Cantor en la revista *Crelle* o de persuadir a Heine para que retirase uno de sus artículos en la misma revista.

Debido a esta disputa con su viejo amigo Kronecker, incluso antes de la celebración del 70 cumpleaños, Weierstrass barajó muy seriamente la posibilidad de abandonar Berlín e irse a Suiza con sus hermanas. Finalmente se quedó en la capital alemana, e incluso Kronecker asistió al acto de homenaje de sus setenta años, pero era evidente que la cordial relación que habían mantenido ya había terminado.

No obstante, aunque su preocupación era un tanto exagerada, esta circunstancia le llevó a pensar que, si no publicaba sus trabajos, sus logros podrían caer en el olvido y, por tanto, todo su legado peligraría. Dado que sus discípulos se hallaban repartidos por toda Europa y muchos de ellos continuaron su investigación, parece claro que esta inquietud no estaba del todo fundamentada. Además, muchas de las notas de los cursos de Weierstrass fueron publicadas por sus alumnos en distintas fases a lo largo de su vida, con lo que ese olvido no iba a suceder.

En cualquier caso, en 1885 se creó una comisión especial encargada de editar las obras de Weierstrass, en la que participaron los propios alumnos y colegas con las notas que habían tomado en clase y de los trabajos ya publicados. Weierstrass tenía mucho interés en que el material que se publicara fuese coherente con sus investigaciones y fuera totalmente cierto y riguroso. De hecho, para él lo más importante no era la autoría de la publicación, ni tampoco que se le citara, sino que el conocimien-

OTRO RESULTADO DE WEIERSTRASS EN SU ÚLTIMA ETAPA

Georg Cantor, destacado alumno de Weierstrass.

En 1882, el matemático alemán Carl Louis Ferdinand von Lindemann (1852-1939) demostró que π es un número trascendente, lo que significa que π no es cero de ningún polinomio con coeficientes racionales. Previamente, el primer número del que se pudo demostrar que era trascendente, sin haber sido específicamente construido para ello, fue el número *e*, cuya prueba fue ideada por Charles Hermite en 1873. Esta propiedad, tanto para *e* como para π, había sido conjeturada en 1768 por el alemán Johann Heinrich Lambert (1728-1777), quien probó ese mismo año que π es un número irracional. En este sentido, es conveniente notar que un número trascendente también puede ser definido como aquel que no es algebraico, ya que precisamente sus definiciones se contraponen. Además, los números trascendentes han de ser necesariamente números irracionales, ya que todo número racional a/b es solución de $bx-a=0$, con *a* y *b* números enteros. Georg Cantor probó en 1878 que hay tantos números trascendentes como números reales.

Nuevos teoremas

Para demostrar que π es un número trascendente, Lindemann necesitó probar primero que e^{α} es trascendente para cualquier número algebraico α no nulo. En 1885, Weierstrass generalizó este resultado, al actualmente conocido como «teorema de Lindeman-Weierstrass», probando que si $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ son números algebraicos distintos y $a_1, \ldots, a_n$ son números algebraicos no nulos, entonces $a_1e^{\alpha_1} + \ldots + a_ne^{\alpha_n} \neq 0$. Este teorema resulta muy útil para establecer la trascendencia de otros números como sen(α), cos(α), tan(α), con α un número algebraico no nulo, lnα con α un número algebraico positivo y distinto de 1, o la única solución real de la ecuación $\cos(x) = x$. Otro importante resultado en este sentido, que resolvió parcialmente el séptimo problema de Hilbert, es el «teorema de Gelfond-Schneider», probado de forma independiente en 1934 por el ruso Aleksandr Gelfond (1906-1968) y el alemán Theodor Schneider (1911-1988), que afirma que si *a* y *b* son números algebraicos, con $a \neq 0,1$ y *b* irracional, entonces a^b es trascendente.

to científico pudiera avanzar. De esta forma, el primer volumen se editó en 1894 y el segundo en 1895, poco antes de su fallecimiento. Los siguientes cinco volúmenes aparecieron entre 1902 y 1927, ya después de su muerte y gracias al trabajo recopilatorio de sus discípulos Johannes Knoblauch (1855-1915) y Georg Hettner (1854-1914). Finalmente, toda la obra del maestro sería reimprimida en 1967.

ALGUNOS IMPORTANTES RECONOCIMIENTOS A SU TRAYECTORIA ACADÉMICA

Distintos méritos académicos encumbraron la dilatada trayectoria académica de Karl Weierstrass. En efecto, a partir del artículo publicado en *Crelle* y de su entrada en la Universidad de Berlín, su fama fue rompiendo fronteras. A la concesión del grado de doctor honorario en la Universidad de Königsberg (1854), en su etapa inicial hemos de añadir el importante reconocimiento que suponía ser elegido miembro de la Academia de Berlín (1856). Posteriormente, a principios de la década de 1870, Weierstrass ejerció como decano de la Facultad de Filosofía en la que trabajaba y, subsecuentemente, como rector de la Universidad de Berlín, lo que hizo incrementar también su popularidad fuera del ambiente matemático, a pesar de que no estuvo mucho tiempo ocupando estos cargos. Finalmente, también es de destacar que desde 1881 a 1888 fue editor, junto a Kronecker, de *Crelle*.

Además de estos importantes méritos académicos, hemos de añadir distintos reconocimientos y galardones que recibió tanto en Alemania como fuera de ella. En 1875 se convirtió en caballero de la orden *Pour le Mérite* en la categoría de Artes y Ciencias, que era uno de los más altos honores que el Estado alemán otorgaba en ese momento.

También en Alemania, en la etapa final de su trayectoria académica fue distinguido con las medallas Cothenius y Helmholtz en 1887 y 1892 respectivamente, por toda una vida repleta de logros científicos. Eran, pues, galardones puramente honoríficos que la Academia Alemana de las Ciencias Naturales Leopoldina y la Academia de Ciencias de Berlín, a las que Weierstrass pertenecía, decidieron otorgar a su brillante representante. En esta línea, la Royal Society de Londres también le concedió la medalla Copley, en 1895. Además, esta sociedad científica inglesa ya había reconocido su trayectoria académica, al admitirle como miembro. Finalmente, el 8 de abril de 1896 fue elegido miembro honorario extranjero, en el apartado de Matemáticas y Astronomía, de la Academia Estadounidense de las Artes y las Ciencias.

Otros importantes reconocimientos llegaron mucho más tarde. Por ejemplo, en 1976 se decidió poner su nombre a un cráter que se encuentra ubicado en la parte oriental de la Luna; tiene un diámetro de 33 km y una profundidad de 2,4 km. Al respecto, cabe decir que otros nombres de grandes matemáticos —Euler, Gauss, Hilbert— también fueron utilizados con el mismo propósito, debido a que la Unión Astronómica Internacional decidió hacer uso de nombres de destacados científicos, eruditos, artistas y exploradores ya fallecidos para nombrar muchos de los cráteres de impacto lunares. Además, un asteroide situado en la región comprendida entre las órbitas de Marte y Júpiter, descubierto el 8 de septiembre de 1997, recibió el nombre de 14100 Weierstrass.

Por otra parte, tres ciudades muy significativas en la vida de Weierstrass, Ostenfelde, Münster y Paderborn, decidieron dedicarle el nombre de alguna de sus calles. Además, la Facultad de Ingeniería Eléctrica, Informática y Matemáticas de la Universidad de Paderborn otorga anualmente el premio Weierstrass a la excelencia docente. Respecto a la Universidad de Berlín, la sala de conferencias del actual edificio principal lleva su nombre. Además, desde principios de la década de 1990, el Instituto Weierstrass de Análisis Aplicado y Estocástico de Berlín reconoce con su nombre la figura del matemático, que ya aparecía como patrón del extinto Instituto de Matemáticas de la Academia de las Ciencias. Ciertamente, aunque no se suele identificar a Weierstrass como matemático representativo de la matemática aplicada, algunos de sus principales resultados sí que conforman auténticas piedras angulares de algunas ramas de perfil aplicado, como la optimización no lineal. Este hecho, unido al enfoque sobre el análisis de este instituto de investigación, hicieron que hubiera un

gran consenso en torno a la elección de su nombre y que, por tanto, Berlín, la gran ciudad representativa en la vida de Weierstrass, dispusiera de una institución académica que pregonara su nombre.

Distintos congresos y jornadas científicas se han celebrado, y se siguen celebrando en torno a la figura y obra del gran matemático alemán. Precisamente, el Instituto Weierstrass de Análisis Aplicado y Estocástico, en ocasión del bicentenario del nacimiento de Weierstrass, organizó distintas actividades para homenajear la figura de Karl. En concreto, el 31 de octubre de 2015, coincidiendo precisamente con dicha efeméride, se celebró un acto en la Academia de Berlín-Brandeburgo de Ciencias, en el que se le rindió homenaje. En concreto, hubo ocho conferencias históricas impartidas por distintos expertos en la vida y obra de Karl. Además, también en relación al contenido de tales conferencias, en 2016 se terminó de editar el libro *Karl Weierstrass (1815-1897): Aspects of his Life and Work* (*Karl Weierstrass [1815-1897]: Aspectos de su vida y obra*). Previamente, se habían redactado algunos artículos especiales y se habían realizado algunas jornadas con motivo del centenario de su muerte, en 1997. Incluso, en enero de ese mismo año *Crelle* también publicó una conocida imagen suya que fue tomada cuando Weierstrass tenía 80 años.

Lecturas recomendadas

Bell, E. T., *Los grandes matemáticos*, Buenos Aires, Losada, 2010.

—: *Historia de las matemáticas*, Ciudad de México, Fondo de Cultura Económica, 2016.

Boyer, C., *Historia de la matemática*, Madrid, Alianza Editorial, 2007.

Courant, R., y Robbins, H., *¿Qué son las matemáticas?*, México, Fondo de Cultura Económica, 2002.

Davis, P. J., y Hersch, R., *Experiencia matemática*, Barcelona, Editorial Labor, 1989.

Kline, M., *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días*, Madrid, Alianza Editorial, 1999.

Massa, M. R., «Karl Weierstrass (1815-1897): el padre del análisis matemático», Valencia, revista *Mètode*, número 88, 2016.

Murillo, R., *et al.*, *Miscelánea matemática*, volumen 25, México, 1997.

Índice

Abel, Niels Henrik 23, 28, 29, 32, 68, 111, 136
Academia de las Ciencias de Berlín 50, 74, 104, 105, 112, 137, 149
agregados 73
Alembert, Jean le Rond d' 102
Ampère, André-Marie 112
análisis matemático 32, 44, 45, 47, 51, 52, 62, 77, 88, 93, 94, 97, 102, 104, 106-109, 114, 115, 119, 120, 124, 130, 132, 133, 136, 137, 139, 141, 142, 144
Arquímedes de Siracusa 53

banda de Möbius 103
Berkeley, George 102, 106
Bernouilli, Johann 97
Bernstéin, Sergéi 140
Bolzano, Bernard 9, 62-65, 68, 76, 107, 113
botella de Klein 103

cálculo
  diferencial 41, 44, 62, 82, 89, 92, 95, 102-104, 106, 124, 142
  infinitesimal 79, 82, 83, 89, 91, 92, 94, 95, 102, 104, 109, 122, 123, 130
  integral 43, 63, 69, 82, 89, 91-93, 95, 100, 103, 106, 109, 134
Cantor, Georg 119, 136, 137, 141
Cardano, Gerolamo 35
Cauchy, Augustin Louis 9, 45, 62, 64, 65, 68, 105, 106, 108, 111-113, 130, 136, 137
Cayley, Arthur 90
conjetura
  de Goldbach 23
  de los cuatro colores 88, 90
constante de Kepler-Bouwkamp 55
continuidad 7, 8, 9, 50, 51, 63, 64, 67, 68, 88, 99, 105, 106, 109, 111, 114, 132, 138
  uniforme 9, 67, 68
contraejemplo de Weierstrass 110, 115
convergencia 8, 9, 44, 50, 67, 68, 76, 88, 106, 107, 109
copo de nieve de Koch 117, 118, 122, 123
Crelle 15, 22, 136, 146, 148

Crelle, August Leopold 22, 39
criptografía 42
criterio de Weierstrass 69
curva de Peano 17, 118
curvas de Bézier 141

Dedekind, Richard 10, 74-77, 132, 136, 137, 146
derivada 8, 28, 41, 67, 70, 84, 91-95, 100, 106, 109, 111, 113, 115, 139
Descartes, René 96
Dirichlet, Peter Gustav Lejeune 49, 71, 100, 101, 111, 113, 130

épsilon 9, 62, 65, 105
Euclides 107, 108, 118
Eudoxo de Cnidos 53
Euler, Leonhard 33, 64, 97, 100, 104, 109, 112, 136, 149

Fermat, Pierre de 96
forma polar 36
Fourier, Joseph 98, 100, 107, 130
fractal 117, 118,
función
  abeliana 10, 14, 41, 43, 44, 133
  compleja 10, 32, 37, 39, 42, 44, 124
  continua 63, 68, 76, 85-87, 90, 99, 100, 101, 107, 137, 139
  elíptica 10, 15, 23, 25, 26, 28-30, 40-44, 102, 132, 133
  elíptica de Weierstrass 40, 41
  holomorfa 39
  meromorfa 44
  monótona 116
  real 9, 63, 95, 111, 118
  zeta de Riemann 124

Gauss, Carl Friedrich 26, 29, 49, 109, 110, 113, 142, 149
geometría
  analítica 39, 44, 70, 97, 100, 101, 111, 122, 132
  elíptica 10, 15, 23, 25, 26, 28-30, 40-44, 102, 132, 133
  euclidea 103, 107, 108, 117, 122
  fractal 117, 118, 121

Hamilton, William Rowan 108

Instituto Weierstrass de Análisis Aplicado y Estocástico 144, 149
integrales
  elípticas 29, 41
  hiperelípticas 41, 43
interpolación polinómica 140

Klein, Felix 94, 101, 103, 113, 122, 136, 137
Koch, Helge von 117, 118, 122, 123
Kovalevskaya, Sofia 12, 142

Lagrange, Joseph Louis 64, 105, 109, 130, 132,
Laplace, Pierre-Simon 25, 27, 38, 104, 130
Legendre, Adrien-Marie 23, 25, 130
Leibniz, Gottfried Wilhelm 91, 92, 94-97, 102, 129, 130
límite 7-9, 38, 39, 50-53, 56, 58, 59, 62, 68-70, 76, 91, 93, 102, 105, 106, 109, 113, 118, 123
Lobachevski, Nikolái 100

Mandelbrot, Benoît 117
medalla Fields 142
método delta-épsilon 9, 63
Möbius, August Ferdinand 103

Newton, Isaac 25, 91, 92, 94, 95, 97, 102, 105, 106, 119, 129, 130

número
  áureo 60, 61
  entero 23, 38, 42, 86
  imaginario 33
  irracional 60, 74, 76, 147
  natural 61, 68, 70, 72-74, 85, 138
  π 53
  racional 72, 74, 147
  trascendente 147

paradoja de la dicotomía 57
Peano, Giuseppe 117, 118
Pitágoras 70
plano complejo 34, 36, 38, 44, 124
Poincaré, Henri 115, 118
polinomios 9, 96, 102, 137-140
  de Bernstéin, 140
principio de inducción 85, 86
proceso
  de aritmetización del análisis 10, 79, 81, 119, 120, 136
  de rigorización 11, 83, 101, 105, 110, 111, 113, 119
programa de Erlangen 103
prolongación analítica 44

Riemann, Bernhard 109, 112, 113, 124

serie de Fourier 98, 99, 100
series de potencias 97
singularidades 44, 100
Stone, Marshall H. 140
sucesión
  de Fibonacci 60, 61
  numérica 60, 61

Taylor, Brook 139
teorema
  de aproximación de Weierstrass 117, 139, 140
  de Casorati-Weierstrass 44
  de clasificación de los grupos finitos simples 89
  de factorización de Weierstrass 44
  de Fermat 23
  de Fermat, último 21, 43
  de Weierstrass-Stone 140
  fundamental del álgebra 33
teoría
  elemental de números 20, 21
  de aproximación de funciones 137
trigonometría 20, 22, 36, 54

variable compleja 10, 32, 37, 39, 41, 44